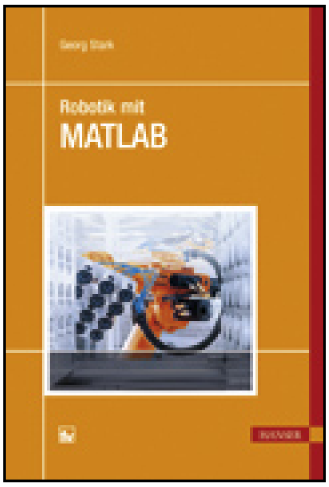
HANSER



Leseprobe

Georg Stark

Robotik mit MATLAB

ISBN: 978-3-446-41962-9

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser.de/978-3-446-41962-9

sowie im Buchhandel.

© Carl Hanser Verlag, München

2 Grundlagen der Robotermathematik

Zielsetzung

Formale, mathematische Modelle sind Voraussetzung für die Programmierung. Dafür sollen die Grundlagen der Robotermathematik vermittelt werden. Der erste Schritt der Robotermodellierung ist die Beschreibung der Mechanik durch geometrische Elemente und ihre gegenseitigen Bezüge. Die Voraussetzung für eine Berechnung sind analytische Methoden, deren Grundlage die Theorie der Vektoren, Matrizen und linearen Gleichungssysteme bildet.

Da Roboter häufig Drehachsen besitzen, ist die Berechnung von Winkeln, die durch die verschiedenen geometrischen Elemente bestimmt werden, eine wichtige Anforderung. Bei der Generierung von sanften, ableitbaren räumlichen und zeitlichen Verläufen spielen Polynome eine wichtige Rolle. Schließlich ist es oft unerlässlich, die Abhängigkeit von Größen bei nur kleinen, differentiellen Änderungen zu berechnen. Auf diese Weise können lineare Gleichungssysteme zur näherungsweisen Beschreibung nichtlinearer Zusammenhänge benutzt werden.

2.1 Formale Modelle

Ein wesentliches Teilgebiet der Robotik sind Verfahren zum Steuern und Überwachen von Robotern mit Hilfe von Rechnersystemen. Die dafür benötigte Software muss Wissen repräsentieren über

- die Eigenschaften der Robotersysteme,
- die durchzuführenden Anwendungsprozesse,
- die Art und Weise der Bedienerdialoge.

Ein kleines Beispiel soll dies verdeutlichen.

Beispiel 2.1 Wissenskomponenten eines Roboters

Die Aufgabe besteht darin, die Werkzeugspitze eines Roboters auf einer geradlinigen Bahn zu verfahren. Für die Durchführung müssen die folgenden Wissenskomponenten vorhanden sein:

1. Mathematische Beschreibung einer geradlinigen Bahn im Arbeitsraum des Roboters.
2. Überführung der räumlichen Ausrichtung des Effektors am Anfang der Bahn in die Endstellung.
3. Berechnung von Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung, basierend auf den vom Anwender vorgegebenen Zieldaten und den durch Mechanik und Elektrik zulässigen Grenzwerten.
4. Berechnung der sich ergebenden Achswinkel des Roboters auf Grund seiner mechanisch-kinematischen Struktur.
5. Berechnung und Regelung der Ströme und Spannungen für die elektrischen Antriebe unter Berücksichtigung der dynamischen Eigenschaften.
6. Falls ein Bahnsensor vorhanden ist, muss der Einfluss der Sensordaten auf den programmierten Bewegungsablauf berechnet werden.
7. Maßnahmen im Fehlerfall.

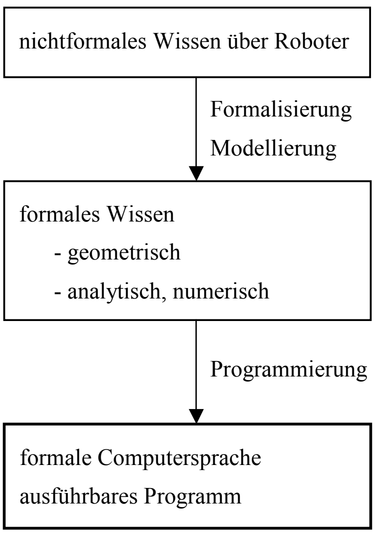


Bild 2.1 Transformation des nichtformalen Wissens in Software

Um dieses Roboterwissen mit Hilfe einer *formalen Computersprache* als Software darzustellen, muss es zuvor in eine formale Form gebracht werden. Dabei hilft die Mathematik. In Bild 2.1 ist dieser Transformationsprozess dargestellt. Das zunächst vorhandene nichtformale Wissen über das Robotersystem wird mit Hilfe der Mathematik in mathematische und damit *formale Modelle* überführt. Diese können durch formale Computersprachen implementiert und auf Rechnern zur Ausführung gebracht werden. Die beiden folgenden Definitionen sollen diese beiden wichtigen Begriffe klarstellen.

Definition – Modell

Ein *Modell* stellt die wesentlichen Eigenschaften und Verhaltensweisen eines natürlichen Phänomens dar. Formale mathematische Modelle sind berechenbar und können mit formalen Sprachen dargestellt werden.

Definition – Formale Sprache

Die Theorie der *Formalen Sprachen* ist eine Teildisziplin der Mathematik und der theoretischen Informatik. Eine Formale Sprache ist eine Menge von Wörtern aus einem vorgegebenen Grundvorrat, dem Alphabet, deren Struktur mit Hilfe der Regeln einer *formalen Grammatik* gebildet wird.

Formale, mathematische Modelle sind somit die Grundlage der Programmierung. Da Roboter räumliche Gebilde sind, spielen in der Robotermathematik die darstellende Geometrie und darauf aufbauend die analytische Geometrie die größte Rolle.

2.2 Punkt, Gerade, Ebene

Punkt, Gerade und Ebene sind einfache geometrische Objekte. Jedoch reichen sie in vielen Fällen zur geometrischen Modellierung von Robotern aus. So wird die räumliche Lage der Werkzeugspitze durch einen Punkt, die Lage einer Bewegungsachse durch eine Gerade beschrieben.

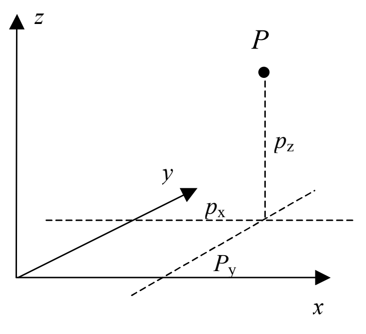


Bild 2.2 Darstellung eines Punktes in einem kartesischen Koordinatensystem

2.2.1 Punkt und Koordinaten

Die Lage eines Punktes im Raum wird durch drei Koordinaten beschrieben, die bezüglich eines Koordinatensystems definiert sind. Meistens wird dafür ein kartesisches Koordinatensystem zu Grunde gelegt. Die Koordinatenachsen x, y, z sind gerichtete Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, und die gleiche Skalierung aufweisen. Die drei Achsen bilden ein Rechtssystem. Dies bedeutet, bewegt man die rechte Handfläche von der x- zur y-Achse, so zeigt der Daumen in Richtung z-Achse. Die Koordinaten eines Punktes sind definiert als die Weglängen p_x, p_y, p_z auf Geraden, parallel zu den Koordinatenachsen (Bild 2.2). Man schreibt $P\,(p_x, p_y, p_z)$.

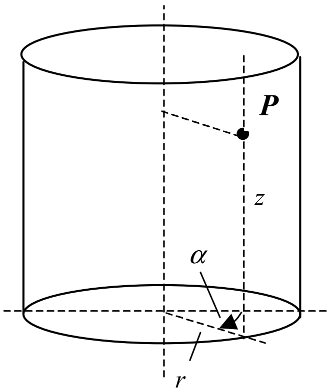


Bild 2.3 Darstellung eines Punktes in einem Zylinderkoordinatensystem

Zur Beschreibung von Punkten können auch andere Koordinatensysteme verwendet werden. So werden in einem Zylinderkoordinatensystem als Koordinaten der Winkel α, der radiale Abstand r und der Abstand von der Grundfläche z verwendet (Bild 2.3).

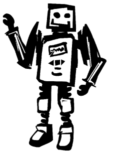
2.2.2 Vektoren

Zwei Punkte in der Ebene oder im Raum, die in einer bestimmten Richtung durchlaufen werden, definieren einen Vektor. Jeder Vektor $\vec{v}$ hat eine Länge $|\vec{v}|$, die seinem Betrag entspricht, und eine Richtung. Zwei Vektoren werden als gleich aufgefasst, wenn sie gleichen Betrag und gleiche Richtung haben. Der gleiche Ort ist nicht erforderlich. Solche Vektoren werden als *freie Vektoren* bezeichnet. Sind Vektoren an einen festen Ort gebunden, z.B. den Ursprung des Koordinatensystems, so heißen sie *Ortsvektoren*.

Wichtig ist, dass man Vektoren numerisch darstellen und somit berechnen kann. Dies wird ausführlich in Abschnitt 2.4.1 behandelt. Vorab jedoch sei gesagt, dass jeder Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination bezüglich der n Vektoren $\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n$ einer Vektorbasis B dargestellt werden kann. Die Koeffizienten der Linearkombination werden als die *Komponenten* $v_1, \ldots v_n$ von $\vec{v}$ bezeichnet.

2.2.3 Gerade in Ebene und Raum

Geraden werden analytisch durch lineare Gleichungen dargestellt, die einen eindimensionalen Lösungsraum (Abschnitt 2.4.2) haben. Ein beliebiger Punkt auf einer Geraden wird somit durch nur eine Zahl eindeutig definiert, er hat nur einen Freiheitsgrad. Die Tabellen 2.1 und 2.2 zeigen die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten. *Explizite* und *implizite Darstellung* sind unterschiedliche Schreibweisen für Funktionsgleichungen. Da eine Gerade nur eine unabhängige Veränderliche haben kann, können mit einer einzigen expliziten oder impliziten Gleichung nur Geraden in der Ebene dargestellt werden. Eine Gleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen hat einen zweidimensionalen Lösungsraum und beschreibt damit eine Ebene im Raum.



Hinweis – Freiheitsgrad

Freiheitsgrade sind Parameter eines Elements oder Systems. Alle Parameter zusammen bestimmen dessen Zustand eindeutig. Jeder Freiheitsgrad kann unabhängig von allen anderen verändert werden. Beispielsweise hat ein Punkt in der Ebene zwei Freiheitsgrade, im Raum jedoch drei. Für nicht punktförmige Elemente ergeben sich weitere Freiheitsgrade bezüglich möglicher Drehungen. So besitzt eine allgemeine geometrische Figur in der Ebene einen weiteren Freiheitsgrad. Ein allgemeiner Körper im Raum weist drei weitere Freiheitsgrade auf.

Tabelle 2.1 Mathematische Darstellung einer Geraden in der Ebene

Darstellungsart	Mathematischer Ausdruck
explizite Darstellung:	$y=mx+c=f(x);\ f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R};\quad m,c\in\mathfrak{R}$
implizite Darstellung:	$F(x,y)=mx-y+c=0$
Vektordarstellung:	$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u};\ \ t\in\mathfrak{R}$
Komponentendarstellung:	$x_1=a_1+tu_1\ ,\ x_2=a_2+tu_2$
Hesse-Normalenform:	$n_1 x+n_2 y+n_0=0$ Für den Normalenvektor gilt: $\vec{n}=\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix};\ \ \lvert\vec{n}\rvert=1$ Für einen beliebigen Punkt $P\ (p_1, p_2)$ in der Ebene erhält man den senkrechten Abstand d von der Geraden: $n_1 p_x+n_2 p_y+n_0=d$

Tabelle 2.2 Mathematische Darstellung einer Geraden im Raum

Darstellungsart	Mathematischer Ausdruck
Vektordarstellung:	$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u};\ \ t\in\mathfrak{R}$
Komponentendarstellung:	$x_1=a_1+tu_1\ ,\quad x_2=a_2+tu_2\ ,\quad x_3=a_3+tu_3$

Die *Vektordarstellung* ist eine lineare Gleichung mit Vektoren, dem *Hinführungsvektor* $\vec{a}$, dem *Richtungsvektor* $\vec{u}$ und dem *Ergebnisvektor* $\vec{x}$. Bei komponentenweiser Schreibweise erhält man die *Komponentendarstellung*. Eine besondere Darstellung für Geraden in der Ebene ist die *Hesse-Normalenform*. Setzt man für die Veränderlichen die Koordinaten eines nicht auf der Geraden liegenden Punktes P ein, so erhält man dessen vorzeichenbehafteten Abstandswert d. Ein positiver Wert von d bedeutet, dass P in der durch die Gerade abgetrennten Halbebene liegt, in die auch der Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt. Beispiel 2.2 verdeutlicht die Anwendung.

Beispiel 2.2 Hesse-Normalenform

Gegeben sind die Punkte P_1 *(1,0)* und P_2 *(-1,2)*, deren Abstände d_1 und d_2 von der Geraden g berechnet werden sollen. Dies ist in Bild 2.4 dargestellt. Die Gerade g ist gegeben durch:

Explizite Darstellung: $y = f(x) = x + 1$

Implizite Darstellung: $x - y + 1 = 0$

Hesse-Normalenform: $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}} = d;\ mit\ \vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Man erhält $d_1 = \sqrt{2}$ und $d_2 = -\sqrt{2}$.

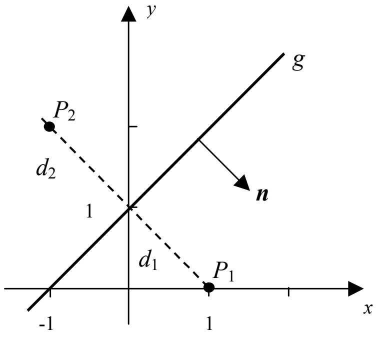


Bild 2.4 Punkte P_1, P_2 mit den Abstanden d_1, d_2 zur Geraden g

2.2.4 Schnittpunkt zweier Geraden

Um den Schnittpunkt zweier Geraden in der Ebene zu berechnen, werden die beiden Geradengleichungen kombiniert, entweder durch Gleichsetzen oder durch Addition. Drei verschiedene Lösungsfälle können auftreten:

- eine Lösung – die Geraden schneiden sich,
- keine Lösung – die Geraden sind parallel,
- unendlich viele Lösungen – die Geraden sind gleich.

Werden die Vektorgleichungen zweier Geraden im Raum g_1, g_2 gleichgesetzt, ergibt sich ein überbestimmtes Gleichungssystem bezüglich der Geradenparameter t_1 und t_2. Der Grund ist, dass sich Raumgeraden in der Regel nicht schneiden. Definiert man eine dritte Gerade g_3 so, dass die beiden Geraden g_1, g_2 von dieser rechtwinklig geschnitten werden, erhält man ein eindeutig lösbares Gleichungssystem mit drei Komponentengleichungen und den drei Geradenparametern t_1, t_2, t_3 als Unbekannte.

$$g_1:\ \vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{u};\quad g_2:\ \vec{x} = \vec{b} + t_2\vec{v};\quad g_3:\ \vec{x} = \vec{c} + t_3\vec{w}$$

Der Hinführungsvektor $\vec{c}$ ergibt sich durch den Schnittpunkt von g_1 und g_3.

$$\vec{c} = \vec{a} + t_1\vec{u}\ .$$

Der Richtungsvektor $\vec{w}$ steht senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Nun werden die Gleichungen von g_2 und g_3 gleichgesetzt.

$$\vec{b}+t_2\vec{v}=\vec{c}+t_3\vec{w}$$

Ersetzt man $\vec{c}$ und $\vec{w}$, so erhält man

$$\vec{b}+t_2\vec{v}=\vec{a}+t_1\vec{u}+t_3(\vec{u}\times\vec{v});\quad \begin{bmatrix}\vec{u} & -\vec{v} & \vec{u}\times\vec{v}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3\end{bmatrix}^T=\vec{b}-\vec{a}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für drei Unbekannte. Das Lösungsverfahren wird in Abschnitt 2.4.2 behandelt.

2.2.5 Ebene im Raum

Eine Ebene wird durch eine lineare Gleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen dargestellt. Die Tabelle zeigt die verschiedenen Möglichkeiten der Darstellung, analog zu denen von Geraden in der Ebene.

Tabelle 2.3 Mathematische Darstellung einer Ebene im Raum

Darstellungsart	**Mathematischer Ausdruck**
explizite Darstellung:	$z=mx+ly+c=f(x,y);\ f:\Re^2\to\Re;\quad m,l,c\in\Re$
implizite Darstellung:	$F(x,y,z)=mx+ly-z+c=0;$
Vektordarstellung:	$\vec{x}=\vec{a}+t_1\vec{u}+t_2\vec{v};\ t_1,t_2\in\Re$
Komponentendarstellung:	$x_1=a_1+t_1u_1+t_2v_1$, $x_2=a_2+t_1u_2+t_2v_2$, $x_3=a_3+t_1u_3+t_2v_3$
Hesse-Normalenform:	$n_1x+n_2y+n_3z+n_0=0$, Für den Normalenvektor gilt: $\vec{n}=\begin{bmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{bmatrix};\ \lvert\vec{n}\rvert=1$ Für einen beliebigen Punkt $P\ (p_x, p_y, p_z)$ im Raum erhält man den senkrechten Abstand d von der Ebene: $n_1p_x+n_2p_y+n_3p_z+n_0=d$

2.2.6 Schnittgerade zweier Ebenen

Um die Schnittgerade zweier Ebenen zu berechnen, werden deren Gleichungen gleichgesetzt oder addiert. Drei verschiedene Lösungsfälle bezüglich der Schnittgerade können auftreten.

- eine Lösung – die Ebenen schneiden sich,
- keine Lösung – die Ebenen sind parallel,
- unendlich viele Lösungen – die Ebenen sind gleich.

Beispiel 2.3 zeigt die Vorgehensweise bei Vektordarstellung und impliziter Darstellung von Ebenen.

Beispiel 2.3 Berechnung der Schnittgerade zweier Ebenen

a) Vektordarstellung:

$$E_1\colon\ \vec{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ E_2\colon\ \vec{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}+t_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+t_4\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Durch Gleichsetzen der Ebenengleichungen erhält man: $t_1=t_4;\quad t_2=2;\quad t_3=1$.

Durch Einsetzen dieser Lösung in E_1 (oder in E_2) ergibt sich die Gleichung der Schnittgeraden zu

$$g\colon\ \vec{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

b) Implizite Darstellung:

$$E_1\colon\ 1x+0y+0z-1=0$$
$$E_2\colon\ 0x+0y+1z-2=0$$

Die beiden Gleichungen stellen ein unterbestimmtes Gleichungssystem für drei Unbekannte dar. Das Lösungsverfahren wird in Abschnitt 2.4.2 behandelt.

2.3 Trigonometrische Funktionen

2.3.1 Gradmaß, Bogenmaß, Einheitskreis

Neben dem Gradmaß wird häufig das Bogenmaß benutzt. Dessen Wert entspricht der Länge des zu einem bestimmten Winkel gehörigen Bogens eines Einheitskreises (Radius r=1). Für die Umrechnung von Gradmaß α_G nach Bogenmaß α_B gilt deshalb:

$$\alpha_B=\alpha_G\frac{\pi}{180}$$

Die trigonometrischen Funktionen können in einem Einheitskreis mit den vier Quadranten I - IV definiert werden, dargestellt in Bild 2.5. Es gilt:

$$\sin(\alpha)=AB;\quad \cos(\alpha)=OA;\quad \tan(\alpha)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{AB}{OA};\quad \cot(\alpha)=\frac{1}{\tan(\alpha)}=\frac{OA}{AB}$$

Die Werte der trigonometrischen Funktionen für die Winkel 0°, 30°, 45°, 60°, 90° betragen:

$$\text{sin: } 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\,;\ \text{cos: } 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\,;\ \text{tan: } 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ 1,\ \sqrt{3},\ \infty$$

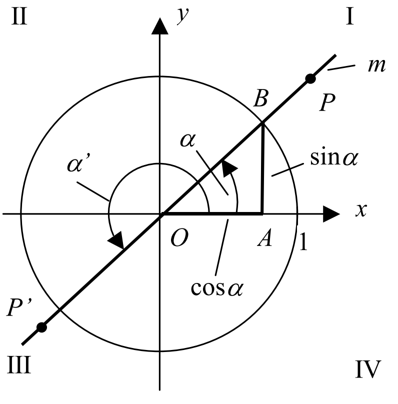


Bild 2.5 Definition der trigonometrischen Funktionen im Einheitskreis

2.3.2 Inverse trigonometrische Funktionen

In der Praxis müssen sehr häufig Winkel in Abhängigkeit von Punkten, Vektoren, Strecken oder Geraden berechnet werden. Dazu werden die inversen trigonometrischen Funktionen benötigt.

Für die inverse Tangensfunktion atan*(m)* gilt:

$$\alpha = a\tan(m);\quad a\tan: \Re \to (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Eine beliebige Steigung *m* einer Geraden wird so auf einen Wertebereich von nur 180° abgebildet. Dies entspricht π im Bogenmaß.

Wünschenswert ist jedoch ein Wertebereich von insgesamt 360° oder 2π im Bogenmaß. Ein Blick auf Bild 2.5 zeigt, dass es zu einer gegebenen Steigung *m* einer Geraden zwei Winkel α und α' gibt, die sich um 180° unterscheiden. Die Zuordnung der Steigung einer Geraden zum dazugehörigen Winkel wird eindeutig, wenn zusätzlich der Quadrant bezeichnet wird, in dem der freie Schenkel des Winkels liegt. Dies wird dadurch erreicht, dass die Steigung nicht durch eine skalare Größe *m*, sondern indirekt durch die Koordinaten *x, y* eines Punktes P definiert wird. Dadurch werden der Quadrant und der zugeordnete Winkel eindeutig beschrieben. Für die so erweiterte inverse Tangensfunktion atan2*(y,x)* gilt:

$$\alpha = a\tan 2(y,x); \quad a\tan 2 : \Re^2 \rightarrow [-\pi, \pi]$$

Für die Anwendung des Kosinussatzes im nächsten Abschnitt wird noch die inverse Kosinusfunktion benötigt. Es gilt:

$$\alpha = a\cos(l); \quad a\cos : [-1,1] \rightarrow [0,\pi]$$

2.3.3 Winkel in einem allgemeinen Dreieck, Kosinussatz

Für die Berechnung von Winkeln in einem allgemeinen Dreieck eignet sich besonders gut der *Kosinussatz*.

$$s_1^2 = s_2^2 + s_3^2 - 2 s_2 s_3 \cos\varphi_1 \tag{2.1}$$

Der Winkel φ_1 ist der Gegenwinkel zur Seite s_1. Die Formel für die beiden anderen Seiten ist entsprechend.

Für φ_1=90° erhält man den *Lehrsatz des Pythagoras* mit s_1 als Hypotenuse.

Ist φ_1=180°, so ergibt sich mit Hilfe der *1. binomischen Formel*[1] die Aussage, dass die Strecke s_1 die Summe von s_2 und s_3 ist.

$$s_1^2 = s_2^2 + s_3^2 + 2 s_2 s_3 = (s_2 + s_3)^2; \quad s_1 = s_2 + s_3$$

2.4 Lineare Algebra

Die lineare Algebra[2] beschäftigt sich mit Vektoren, Matrizen und linearen Abbildungen. Sie hat eine große Bedeutung für die Berechnung geometrischer Objekte.

2.4.1 Vektoren und Matrizen

Vektorraum

Ein Vektorraum V ist eine Menge von Vektoren über den reellen Zahlen $\Re$ mit den beiden algebraischen Operationen:

---

[1] Die drei *binomischen Formeln* lauten: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

[2] Andere Bezeichnungen sind Vektoralgebra oder lineare Geometrie