Stefan Glasauer

Integralgeometrie konvexer Körper im sphärischen Raum

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematischen Fakultät
der Albert-Ludwigs-Universität
Freiburg im Breisgau

1995

Adresse des Autors: Stefan Glasauer, Hochschule Augsburg, An der Hochschule 1,
86161 Augsburg, Germany, E-Mail stefan.glasauer@hs-augsburg.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die auf Blaschke zurückgehende Integralgeometrie behandelt geometrische Objekte, die der Operation einer Gruppe unterworfen werden, und bezüglich invarianter Maße erklärte Mittelwerte von geometrisch definierten Funktionalen. Diese Charakterisierung des Gegenstandes der Integralgeometrie stammt von Hadwiger, der im sechsten Kapitel seines Buches [13] einen eleganten Zugang zu den klassischen Resultaten dieser Disziplin wiedergegeben hat. Weitere bekannte und einflußreiche Bücher zum Thema gibt es u.a. von Blaschke [5] und Santaló [27, 30]. Eine Einführung in verschiedene Aspekte der Integralgeometrie geben auch Schneider & Weil [42], allgemeinere Resultate und weiterführende Hinweise findet man in Schneider [39], Abschnitt 4.5. Es sollte jedoch betont werden, daß sich die beiden letztgenannten Quellen in mehrfacher Hinsicht von den älteren Monographien über Integralgeometrie unterscheiden. Bei Schneider und Weil bilden konvexe Körper und endliche Vereinigungen von solchen den Gegenstand der Betrachtung, ferner werden elementare Sätze aus der Theorie invarianter Maße auf lokalkompakten homogenen Räumen verwendet. Der Zugang dieser Autoren kommt daher ohne differentialgeometrische Hilfsmittel, wie etwa Differentialformen, aus. Ein weiterer wesentlicher Unterschied besteht darin, daß bei Schneider und Weil „lokalisierte“ Funktionale untersucht werden; insbesondere finden die Krümmungsmaße von Federer und die aus der Theorie der gemischten Volumina bekannten Oberflächenmaße Anwendung.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Integralgeometrie konvexer Körper im sphärischen Raum. Es war unser Ziel zu untersuchen, inwieweit der in [42] und [39] dargestellte Zugang zur Integralgeometrie euklidisch konvexer Körper, der also mit konvexgeometrischen und maßtheoretischen Hilfsmitteln auskommt und der zu lokalen Versionen der integralgeometrischen Formeln führt, auch im sphärischen Raum verfolgt werden kann. Es zeigte sich, daß dies in der Tat in sehr weitgehendem Maß möglich ist. Zum Teil konnten vom euklidischen Fall her bekannte Argumente und Beweisverfahren mutatis mutandis auch im sphärischen Raum angewendet werden. Da der zugrundeliegende sphärische Raum S^n und seine Bewegungsgruppe SO_{n+1} im Gegensatz zum euklidischen Fall keine Produktstruktur aufweisen, mußten aber auch oft neue Ideen entwickelt werden, um Entsprechungen zu bekannten Resultaten der euklidischen Integralgeometrie beweisen zu können. In einigen Fällen ist es möglich, diese abgewandelten Beweismethoden umgekehrt wiederum im euklidischen Fall anzuwenden. Überraschend haben sich dabei auch Resultate ergeben, die offenbar neu sind und die bekannte integralgeometrische Formeln in substantieller Hinsicht verallgemeinern.

Ein wesentlicher Unterschied zur euklidischen Theorie beruht auf der Kompaktheit der Räume S^n und SO_{n+1} und der Existenz der sphärischen Polarenabbildung. Es ist infolgedessen möglich, von kinematischen Formeln, die den Schnitt eines ruhenden und eines bewegten konvexen Körpers betreffen, durch „Dualisieren“ zu Formeln für die sphärisch konvexe Hülle zweier Körper überzugehen. Solche kinematischen Formeln haben im euklidischen Raum keine Entsprechung; insoweit weist also die sphärische Integralgeometrie eine größere Geschlossenheit auf als die euklidische. An anderer Stelle hingegen macht sich störend bemerkbar, daß äußere Parallelkörper sphärisch konvexer Körper auch für kleine Abstandsparameter nicht sphärisch konvex zu sein brauchen. So mußten wir bei der Formulierung von Ergebnissen über Distanzintegrale fordern, daß ein Parallelkörper einer der beteiligten konvexen Körper noch konvex ist. Im sphärischen Raum ist dies eine stark einschränkende Voraussetzung, die dagegen im euklidischen Raum stets erfüllt ist.

Wir geben nun einen kurzen Überblick über die in dieser Arbeit behandelten Ergebnisse. Kapitel 2 hat vorbereitenden Charakter: Es werden einige Hilfssätze über sphärisch konvexe Körper und über additive Abbildungen bereitgestellt. In Kapitel 3 werden die auf der Menge aller Stützelemente konzentrierten verallgemeinerten Krümmungsmaße sphärisch konvexer Körper, in dieser Arbeit auch Stützmaße genannt, als Koeffizienten in einer Steiner-Formel für das lokale Parallelvolumen definiert. Dieses Parallelvolumen wird im Fall sphärischer Polytope in expliziter Weise berechnet; die Stützmaße beliebiger sphärisch konvexer Körper können dann durch Approximation erklärt werden. Durch Spezialisierung der Stützmaße werden die auf dem Körper konzentrierten Krümmungsmaße, die inneren Volumina und gewisse vektorwertige Funktionale, die wir Krümmungsvektoren nennen, definiert. Für die letztgenannten Funktionale ermitteln wir in Verallgemeinerung von Resultaten von Arnold [3] das Verhalten beim Übergang zu Parallelkörpern. In Kapitel 4 stehen die im Hinblick auf integralgeometrische Formeln wichtigen Eigenschaften der Stützmaße, der Krümmungsmaße und der inneren Volumina im Vordergrund. Wir gehen auf Charakterisierungssätze für Linearkombinationen der Stütz- und Krümmungsmaße ein und geben einen durch eine Idee von McMullen [20] angeregten Beweis für die Gauß-Bonnet-Formel sphärisch konvexer Körper, die die Euler-Charakteristik durch die inneren Volumina ausdrückt.

Den inhaltlichen Kern der Arbeit stellen die Kapitel 5 bis 7 dar. Das Hauptergebnis von Kapitel 5 ist die kinematische Hauptformel in einer Version für Krümmungsmaße von endlichen Vereinigungen sphärisch konvexer Körper. Als Folgerungen erhalten wir u.a. die Formel für das Maß der Menge aller Drehungen, die einen bewegten sphärisch konvexen Körper in eine Trefflage zu einem festen Körper bringen, sowie globale Formeln im Zusammenhang mit der sphärisch konvexen Hülle eines festen und eines bewegten Körpers und globale Projektionsformeln. Weiter wird eine Verallgemeinerung der kinematischen Hauptformel behandelt, bei der das Krümmungsmaß im Integranden ersetzt wird durch ein Element aus einer umfassenderen Menge von Funktionalen. Verallgemeinerungen in anderer Hinsicht bringt Kapitel 6: Hier werden kinematische Formeln für Stützmaße im Zusammenhang mit Schnitten, sphärisch konvexen Hüllen und Projektionen hergeleitet. Diese Ergebnisse stellen Verallgemeinerungen der entsprechenden Formeln aus Kapitel 5 dar. Die Beweise sind aufwendiger; sie verwenden wesentlich ein tieferliegendes Resultat von Schneider [35] über die Randstruktur euklidisch konvexer Körper. Als Folgerung aus einem Spezialfall der in dieser Weise verallgemeinerten kinematischen Hauptformel ergibt sich eine anschauliche geometrische Interpretation der Stützmaße sphärisch konvexer Körper. In Kapitel 7 schließlich werden Ergebnisse über Distanzintegrale behandelt. Unter gewissen Einschränkungen erlauben diese Resultate eine Interpretation der Stützmaße mit Hilfe von berührenden niederdimensionalen Untersphären.

Kapitel 8 behandelt Anwendungen der in den Kapiteln 5 und 6 entwickelten Beweisverfahren in der euklidischen Integralgeometrie. Es wird ein einfacher Beweis für die „abstrakte" lokale kinematische Formel von Schneider [40] gegeben; die aufwendigeren Methoden zur Charakterisierung von Quermaßintegralen werden dabei nicht verwendet. Weiter werden unter gewissen Einschränkungen Versionen der kinematischen Hauptformel für Stützmaße bewiesen; solche Versionen sind bisher in der Literatur offenbar nicht behandelt worden. Die erwähnten Einschränkungen stehen in Zusammenhang mit einer gewissen Aussage über das Randverhalten konvexer Körper, die nur in Spezialfällen bewiesen werden konnte, deren allgemeine Gültigkeit wir jedoch vermuten. Für Stützmaße von Mengen des Konvexrings konnten wir allgemein eine Version der Crofton-Formel zeigen, die in einem Spezialfall eine neue integralgeometrische Interpretation der Stützmaße konvexer Körper, insbesondere also auch der Oberflächenmaße, ergibt.

Herrn Prof. Dr. Rolf Schneider möchte ich danken für die wertvollen Anregungen, die ich von ihm zu dem in dieser Dissertation behandelten Themenkreis erhalten habe.

2 Bezeichnungen und Vorbemerkungen

In diesem Kapitel legen wir Bezeichnungen fest, weisen auf einige bekannte Tatsachen im Zusammenhang mit sphärisch konvexen Körpern hin und zeigen einige einfache, aber für Späteres wichtige Hilfsaussagen. Die hier vereinbarten Bezeichnungen sind gültig für die Kapitel 3 bis 7. In Kapitel 8, wo Ergebnisse der euklidischen Integralgeometrie behandelt werden, wird die dort verwendete Notation neu festgelegt.

Wie üblich sei $\mathbb{R}^{n+1}$ der reelle Vektorraum aller $(n+1)$-Tupel reeller Zahlen, versehen mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der induzierten Norm $\| \cdot \|$. Auf der Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ wird die *sphärische Metrik* d durch $d(x,y) := \arccos\langle x, y\rangle$ gegeben. Wegen $\|x - y\| = (2 - 2\cos d(x,y))^{1/2}$ für $x, y \in S^n$ induziert d auf S^n die vom umgebenden Raum herrührende Spurtopologie.

Mit lin A, pos A, conv A sei die lineare, positive bzw. konvexe Hülle einer Menge $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet. Wie üblich sei $\operatorname{lin} \emptyset = \operatorname{pos} \emptyset := \{o\}$, wobei o der Nullvektor in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Mit $\mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ bezeichnen wir die Menge aller konvexen Körper (d.h. aller kompakten, konvexen Mengen) in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ist X ein topologischer Raum, so sei $\mathcal{B}(X)$ die Borelsche σ-Algebra auf X. Eine reelle Funktion auf X nennen wir kurz *meßbar*, wenn sie Borel-meßbar ist. Für eine Teilmenge $A \subset X$ sei cl A, bd A, int A der Abschluß, der Rand bzw. das Innere von A. Teilmengen topologischer Räume werden stets mit der Unterraumtopologie, Produkte mit der Produkttopologie versehen.

Für $i \in \{0, \dots, n+1\}$ sei λ^i das i-dimensionale (äußere) Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Einschränkung von λ^{n+1} auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ stimmt mit dem Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{n+1}$, und die Einschränkung von λ^n auf $\mathcal{B}(S^n)$ stimmt mit dem sphärischen Lebesgue-Maß auf S^n überein. Wir definieren noch $\kappa_{n+1} := \lambda^{n+1}(B^{n+1})$, wobei $B^{n+1} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \le 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, und $\beta_n := \lambda^n(S^n)$, also

$$\beta_n = (n+1)\kappa_{n+1} = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Die Gruppe SO_{n+1} aller eigentlichen Drehungen in $\mathbb{R}^{n+1}$ sei mit der üblichen Topologie versehen. Das invariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(SO_{n+1})$ bezeichnen wir mit ν.

Wir stellen nun einige grundlegende Definitionen, Bezeichnungsweisen und Aussagen in Verbindung mit sphärisch konvexen Körpern zusammen. Ein *konvexer Kegel* in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist eine nichtleere, bezüglich Vektoraddition und Multiplikation mit nichtnegativen reellen Zahlen abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$. Ein *sphärisch konvexer Körper* ist nun definitionsgemäß der Durchschnitt eines abgeschlossenen konvexen Kegels mit S^n; das Symbol $\mathcal{K}$ bezeichne die Menge aller sphärisch konvexen Körper. Wenn keine Verwechslungsgefahr mit konvexen Körpern im euklidischen Raum besteht, werden wir die Elemente von $\mathcal{K}$ oft einfach auch *konvexe Körper* nennen. Enthält ein sphärisch konvexer Körper kein antipodisches Punktepaar, so ist er in einer offenen Halbsphäre enthalten; in diesem Fall bezeichnen wir ihn auch als *eigentlich konvex*; $\mathcal{K}_0$ sei die Menge aller eigentlich konvexen Körper in S^n. Es sei bd K und int K der Rand bzw. das Innere eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}$ relativ zu S^n; mit relint K sei das Innere von K in bezug auf $S^n \cap \text{lin } K$ bezeichnet. Mit $\dim K$ bezeichnen wir die *Dimension* eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}$, also $\dim K := (\dim \text{lin } K) - 1$. Sind $K, K' \in \mathcal{K}$, so ist $K \vee K' := S^n \cap \text{pos } (K \cup K')$ die *sphärisch konvexe Hülle* von K und K'.

Eine alternative Beschreibung sphärisch konvexer Körper ist mit Hilfe sphärischer Strecken möglich: Sind $x, y \in S^n$ Punkte mit $d(x, y) < \pi$, so sei $[x, y] := S^n \cap \text{pos } \{x, y\}$ die abgeschlossene *sphärische Strecke*, die x und y verbindet. Eine abgeschlossene Teilmenge von S^n ist nun genau dann ein konvexer Körper, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \pi$ die Inklusion $[x, y] \subset K$ besteht.

Nach Definition sind in $\mathcal{K}$ auch die *Untersphären*, d.h. die Schnitte linearer Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit S^n, enthalten; wir bezeichnen mit $\mathcal{S}$ die Menge aller Untersphären von S^n (einschließlich der leeren Menge und ganz S^n), und für $q \in \{-1, \ldots, n\}$ sei $\mathcal{S}_q$ die Menge aller q-Untersphären, also die Menge aller $L \cap S^n$ mit $(q+1)$-dimensionalen linearen Unterräumen L von $\mathbb{R}^{n+1}$. Wird $S \in \mathcal{S}_q$ beliebig gewählt, so trägt $\mathcal{S}_q$ die Finaltopologie bez. der Abbildung $SO_{n+1} \to \mathcal{S}_q$, $\rho \mapsto \rho S$. Unter der Operation der Gruppe SO_{n+1} wird $\mathcal{S}_q$ zu einem homogenen Raum, und das Bildmaß ν_q des Maßes ν unter der eben genannten Abbildung definiert das auf 1 normierte Haarsche Maß von $\mathcal{S}_q$.

Ist $K \in \mathcal{K}$, so sei

$$K^* := \{x \in S^n : \langle x, y \rangle \leq 0 \text{ für alle } y \in K\}$$

der *Polarkörper* von K. Er ist wiederum ein konvexer Körper, es gilt $(K^*)^* = K$, für $K, K' \in \mathcal{K}$ ist $(K \vee K')^* = K^* \cap K'^*$ und $(K \cap K')^* = K^* \vee K'^*$, und es gilt $K \cup K' \in \mathcal{K}$ genau dann, wenn $K^* \cup K'^* \in \mathcal{K}$ ist (dies folgt sofort aus den entsprechenden Eigenschaften konvexer Kegel, s. etwa Schneider [39], S. 34). Ist $S \in \mathcal{S}$ eine Untersphäre, so gilt $S^* = S^n \cap (\text{lin } S)^\perp$, wobei $(\text{lin } S)^\perp$ das orthogonale Komplement des linearen Unterraums lin S ist. Setzen wir für $K \in \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$ und $x \in S^n$ abkürzend $d(K, x) := \min\{d(x, y) : y \in K\}$ und aus formalen Gründen noch $d(\emptyset, x) := \pi/2$, so können wir auch $K^* = \{x \in S^n : d(K, x) \geq \pi/2\}$ schreiben. Für $K \in \mathcal{K}$ und $\epsilon \geq 0$ sei

$$K_\epsilon := \{x \in S^n : d(K, x) \leq \epsilon\}$$

der *Parallelkörper* von K zum Abstand ϵ. Durch

$$\delta(K, K') := \min\{\epsilon \geq 0 : K \subset K'_\epsilon \text{ und } K' \subset K_\epsilon\}$$

wird die *Hausdorff-Metrik* δ auf $\mathcal{K}$ definiert. Alle topologischen Begriffe in $\mathcal{K}$ beziehen sich von nun an auf die von δ erzeugte Topologie. Die oben erklärte Topologie auf $\mathcal{S}_q$ stimmt mit der Unterraumtopologie von $\mathcal{S}_q$ als Teilmenge von $\mathcal{K}$ überein.

Ist $B \in \mathcal{K}$ eine sphärische Kugel mit Radius ρ, $0 < \rho < \pi/2$, so enthält ihr Rand keine sphärische Strecke. Für $K \in \mathcal{K}$ und $x \in S^n$ mit $0 \leq d(K,x) < \pi/2$ haben daher K und $B(x, d(K,x))$ genau einen Punkt gemeinsam. Diesen Punkt bezeichnen wir mit $p(K,x)$ und nennen ihn die *metrische Projektion* von x in K. Ist zusätzlich $x \notin K$, so nennen wir $u(K,x) := p(K^*, x)$ den *nach x weisenden Normalenvektor* von K. Es gilt $d(p(K,x), u(K,x)) = \pi/2$ und $x \in [p(K,x), u(K,x)]$, wie man aus dem nachfolgenden Hilfssatz folgern kann. Es wird im Beweis die auch später noch gebrauchte Notation

$$H_u := \{x \in S^n : \langle x, u\rangle = 0\}, \quad H_u^- := \{x \in S^n : \langle x, u\rangle \leq 0\} \qquad (u \in S^n)$$

verwendet; wir sprechen von der $(n-1)$-*Sphäre* bzw. der *Halbsphäre mit Normalenvektor u*.

Hilfssatz 2.1. *Es sei $K \in \mathcal{K}$. Dann gilt*

$$d(K,x) + d(K^*,x) = \pi/2$$

für alle $x \in S^n \backslash (K \cup K^*)$.

Beweis: Es gilt einerseits

$$\pi/2 \leq d(p(K,x), p(K^*,x)) \leq d(p(K,x),x) + d(p(K^*,x),x) = d(K,x) + d(K^*,x)$$

nach der Dreiecksungleichung für die sphärische Metrik. Um andererseits $d(K,x) + d(K^*,x) \leq \pi/2$ zu zeigen, wählen wir $u \in S^n \cap \mathrm{lin}\,\{x, p(K,x)\}$ mit $p(K,x) \in H_u$ und $x \notin H_u^-$. Wir behaupten $u \in K^*$. Gilt dies nicht, so existiert ein $y \in K \backslash H_u^-$, und es gibt einen Punkt $z \in \mathrm{relint}\,[y, p(K,x)]$, der kleinsten sphärischen Abstand zu x besitzt. Es gilt $d(z,x) < d(p(K,x),x)$, und wegen $z \in K$ ergibt sich ein Widerspruch zur Definition von $p(K,x)$. Wegen $d(p(K,x),u) = \pi/2$, $x \in [p(K,x), u]$ und $u \in K^*$ gilt

$$\pi/2 = d(p(K,x),x) + d(x,u) \geq d(K,x) + d(K^*,x)\,,$$

und es folgt die Behauptung. ■

Hilfssatz 2.2. *Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $\delta(K,K') < \pi/2$, so gilt*

$$\delta(K,K') = \delta(K^*, K'^*)\,.$$

Beweis: Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $\alpha := \delta(K,K') < \pi/2$ gegeben. Wir können $K, K' \notin \{\emptyset, S^n\}$ annehmen. Es sei $x \in S^n$ mit $d(K,x) < \pi/2 - \alpha$. Wegen $K \subset K'_\alpha$ existiert ein $y \in K'_\alpha$ mit $d(y,x) < \pi/2 - \alpha$, und es gibt ein $z \in K'$ mit $d(z,y) \leq \alpha$. Es folgt $d(K',x) < \pi/2$. Damit ist

$$\{x \in S^n : d(K',x) \geq \pi/2\} \subset \{x \in S^n : d(K,x) \geq \pi/2 - \alpha\}\,.$$

Die Menge links ist gleich K'^*, und die Menge rechts ist gleich $(K^*)_\alpha$ nach Hilfssatz 2.1. Es gilt also $K'^* \subset (K^*)_\alpha$, und völlig analog ist $K^* \subset (K'^*)_\alpha$. Es folgt $\delta(K^*, K'^*) \leq \delta(K, K') < \pi/2$. Wendet man dieselbe Argumentation auf die Körper K^*, K'^* an, so erhält man $\delta(K, K') = \delta((K^*)^*, (K'^*)^*) \leq \delta(K^*, K'^*) \leq \delta(K, K')$, also $\delta(K, K') = \delta(K^*, K'^*)$. ■

Auch zwei für unsere weiteren Untersuchungen wichtige Stetigkeitsaussagen formulieren wir als Hilfssatz. Zuvor aber noch eine Schreibweise: Ist $K \in \mathcal{K}$ ein sphärisch konvexer Körper, so definieren wir durch

$$\overline{K} := \mathrm{conv}\,(K \cup \{o\})$$

einen euklidisch konvexen Körper $\overline{K} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$. Die Menge der konvexen Körper in $\mathbb{R}^{n+1}$ denken wir uns mit der gewöhnlichen Hausdorff-Metrik versehen.

Hilfssatz 2.3. *Die Abbildungen*

$$\mathcal{K} \to \mathcal{K}, \quad K \mapsto K^*\,,$$

und

$$\mathcal{K} \to \{\overline{K} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1}) : K \in \mathcal{K}\}, \quad K \mapsto \overline{K}\,,$$

sind Homöomorphismen.

Beweis: Die Bijektivität der erstgenannten Abbildung ist klar, und ihre Stetigkeit und die ihrer Inversen folgt aus Hilfssatz 2.2.

Auch die Bijektivität der zweiten Abbildung ist trivial. Die gewöhnliche Hausdorff-Metrik für konvexe Körper in $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen wir für den Moment mit $\overline{\delta}$. Für $K, K' \in \mathcal{K}$ gilt $\delta(K, K') < \pi/2$ genau dann, wenn $\overline{\delta}(\overline{K}, \overline{K'}) < 1$ ist, und in diesem Fall gilt $\overline{\delta}(\overline{K}, \overline{K'}) = \sin\delta(K, K')$. Daraus folgt die gewünschte Aussage. ■

Aufgrund von Hilfssatz 2.3 lassen sich bekannte Aussagen vom Raum der konvexen Körper in $\mathbb{R}^{n+1}$ auf $\mathcal{K}$ übertragen. So folgt z.B. aus dem Auswahlsatz von Blaschke die Kompaktheit des metrischen Raumes $\mathcal{K}$. Eine weitere wichtige Folgerung ist die Stetigkeit des Volumenfunktionals auf $\mathcal{K}$. Das *Volumen* $V_n(K)$ eines sphärisch konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}$ definieren wir durch $V_n(K) := \lambda^n(K)/\beta_n$, und wegen $V_n(K) = \lambda^{n+1}(\overline{K})/\kappa_{n+1}$ folgt die Stetigkeit von $V_n : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ aus der bekannten Stetigkeit des Volumenfunktionals für konvexe Körper im euklidischen Raum. Wir fassen vier für uns wichtige Stetigkeitsaussagen in dem folgenden Hilfssatz zusammen.

Hilfssatz 2.4. *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} V_n &: \mathcal{K} \to \mathbb{R}, \\ d &: \mathcal{K} \times S^n \to \mathbb{R}, \\ p &: \{(K, x) \in \mathcal{K} \times S^n : d(K, x) < \pi/2\} \to S^n, \\ u &: \{(K, x) \in \mathcal{K} \times S^n : 0 < d(K, x) < \pi/2\} \to S^n \end{aligned}$$

sind stetig.

Beweis: Die Stetigkeit des Volumenfunktionals haben wir eben schon aus Hilfssatz 2.3 gefolgert. Aus der Dreiecksungleichung für die sphärische Metrik und der Definition des Hausdorff-Abstandes in $\mathcal{K}$ folgt in einfacher Weise die Stetigkeit der obigen Abbildung d. Die Stetigkeit von p ergibt sich leicht aus der Tatsache, daß die metrische Projektion eindeutig bestimmt ist, und die Stetigkeit von u folgt nun durch Anwendung von Hilfssatz 2.3. ∎

Ein *polyedrischer konvexer Kegel* ist der Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen in $\mathbb{R}^{n+1}$, in deren Rand jeweils der Nullpunkt enthalten ist. Ist $C = \text{pos}\,\{x_1, \ldots, x_m\}$ mit gewissen $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^{n+1}$, so ist C ein polyedrischer konvexer Kegel. Die Menge $\mathcal{P}$ der *sphärisch konvexen Polytope* ist definitionsgemäß die Menge aller Schnitte polyedrischer konvexer Kegel mit der Sphäre S^n.

Grundlegend für viele Schlußweisen im weiteren Verlauf ist die Approximierbarkeit sphärisch konvexer Körper durch sphärische Polytope. Aus dem nachfolgenden Hilfssatz folgt insbesondere, daß $\mathcal{P}$ dicht liegt in $\mathcal{K}$.

Hilfssatz 2.5. *Zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $K \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$ existieren $P_1, P_2 \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{S}$ mit $P_1 \subset K \subset P_2$ und $\delta(K, P_1) \leq \epsilon$, $\delta(K, P_2) \leq \epsilon$.*

Beweis: Wir können $\epsilon < \pi/2$ annehmen. Die offenen sphärischen Kugeln mit Zentren in K und Radius ϵ überdecken den Körper K, und wegen der Kompaktheit von K genügt schon eine endliche Menge $\mathcal{E}$ solcher Kugeln, um K zu überdecken. Definieren wir P_1 als die sphärisch konvexe Hülle der Mittelpunkte der Kugeln aus $\mathcal{E}$, so gilt $P_1 \in \mathcal{P}$, $P_1 \subset K$ und $\delta(K, P_1) \leq \epsilon$. Wäre $P_1 \in \mathcal{S}$, so existierte wegen $K \notin \mathcal{S}$ ein $x \in K\backslash P_1$, und es wäre $\pi/2 = \delta(P_1 \vee \{x\}, P_1) \leq \delta(K, P_1) \leq \epsilon$, im Widerspruch zu $\epsilon < \pi/2$. Um P_2 zu definieren, wählen wir wie eben $P \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{S}$ mit $P \subset K^*$ und $\delta(K^*, P) \leq \epsilon$. Mit $P_2 := P^*$ gilt dann $P_2 \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{S}$, $K \subset P_2$ und $\delta(K, P_2) = \delta(K^*, P) \leq \epsilon$ nach Hilfssatz 2.2. ∎

Ist $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper und $C := \text{pos}\,K$ der erzeugte konvexe Kegel, so sei $\mathcal{F}_i(K)$, $i \in \{-1, \ldots, n\}$, die Menge der i-Seiten von K, also die Menge aller $F \cap S^n$ mit $(i+1)$-Seiten F des Kegels C. Wir setzen noch $\mathcal{F}(K) := \cup_{i=-1}^{n} \mathcal{F}_i(K)$. Es gilt

$$K = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(K)} \text{relint}\, F\,,$$

wobei hier eine disjunkte Vereinigung steht (vgl. dazu etwa Schneider [39], Theorem 2.1.2). Eine Seite $F \in \mathcal{F}_i(K)$ mit $i = \dim K - 1$ nennen wir auch *Facette* von K.

Ist $K \in \mathcal{K}$ und $x \in S^n$, so sei

$$N(K, x) := \{y \in K^* : \langle x, y \rangle = 0\}$$

die Menge der *äußeren Normalenvektoren* von K im Punkt x. Es gilt $N(K,x) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $x \in \operatorname{bd} K$ ist. $\operatorname{Nor} K := \{(x,u) \in S^n \times S^n : u \in N(K,x)\}$ ist die Menge aller *Stützelemente* von K. Die Menge $\operatorname{Nor} K \subset S^n \times S^n$ ist stets abgeschlossen. Ist F eine Seite von K und sind $x, y \in \operatorname{relint} F$, so gilt $N(K,x) = N(K,y)$; dies sieht man ein, indem man sich auf die entsprechende Eigenschaft für abgeschlossene konvexe Kegel beruft. Wir setzen in diesem Fall $N(K,F) := N(K,x)$, wobei $x \in \operatorname{relint} F$ beliebig ist. Ebenfalls mit einem bekannten Sachverhalt für abgeschlossene konvexe Kegel ergibt sich $N(K \cap K', x) = N(K,x) \vee N(K',x)$ für alle $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $\operatorname{relint} K \cap \operatorname{relint} K' \neq \emptyset$ und alle $x \in K \cap K'$. Ist $P \in \mathcal{P}$ ein Polytop und $C := \operatorname{pos} P$ der erzeugte polyedrische Kegel, so ist für $F \in \mathcal{F}_i(P)$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, der Normalenkegel von C bei seiner Seite $\operatorname{pos} F$ gleich $\operatorname{pos} N(P,F)$. Es gilt daher $N(P,F) \in \mathcal{F}_{n-i-1}(P^*)$. Analog ist $F = N(P^*, N(P,F))$, die Abbildung $\mathcal{F}_i(P) \to \mathcal{F}_{n-i-1}(P^*)$, $F \mapsto N(P,F)$, ist also bijektiv.

Abschließend wollen wir noch einige Bezeichnungen im Zusammenhang mit additiven Abbildungen festlegen und einen für Späteres wichtigen Fortsetzungssatz zitieren. Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \to X$, wobei $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von S^n und X eine kommutative Gruppe ist, nennt man *additiv*, wenn

$$\varphi(K_1 \cap K_2) + \varphi(K_1 \cup K_2) = \varphi(K_1) + \varphi(K_2)$$

gilt für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{A}$ mit $K_1 \cap K_2, K_1 \cup K_2 \in \mathcal{A}$ und wenn $\varphi(\emptyset) = 0$ ist, falls $\emptyset \in \mathcal{A}$ gilt. Die Menge aller endlichen Vereinigungen von sphärisch konvexen Körpern nennen wir den *Konvexring*, und wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{R}$. Da jedes $K \in \mathcal{K}$ als endliche Vereinigung von eigentlich konvexen Körpern dargestellt werden kann, ist $\mathcal{R}$ auch gleich der Menge aller endlichen Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{K}_0$. Ist $\varphi : \mathcal{R} \to X$ eine additive Abbildung, so gilt das *Einschließungs-Ausschließungs-Prinzip*, d.h. für $K = K_1 \cup \cdots \cup K_m \in \mathcal{R}$ mit $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{R}$ gilt

$$\varphi(K) = \sum_{v \in S(m)} (-1)^{|v|-1} \varphi(K_v)\,;$$

hierbei sei $S(m)$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von $\{1, \ldots, m\}$, es sei $|v|$ die Anzahl der Elemente von $v \in S(m)$, und für $v = \{i_1, \ldots, i_k\}$ sei

$$K_v := K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_k}\,.$$

Wegen $K \in \mathcal{R}$ können die Mengen $K_1, \ldots, K_m$ insbesondere aus $\mathcal{K}_0$ gewählt werden.

Es ist eine nichttriviale Frage, ob sich eine additive Abbildung auf $\mathcal{K}_0$ additiv auf $\mathcal{R}$ fortsetzen läßt. Existiert eine solche Fortsetzung, so ist sie nach dem Einschließungs-Ausschließungs-Prinzip durch ihre Werte auf $\mathcal{K}_0$ schon eindeutig festgelegt. Zur Frage der Fortsetzbarkeit geben wir ein Resultat von Groemer [8] an, das man, wie der Autor bemerkt ([8], S. 409), völlig analog zu seiner Vorgehensweise für den Fall euklidisch konvexer Körper gewinnen kann (für diesen Fall vgl. auch Schneider & Weil [42], S. 52 ff.).

Satz 2.6. *Ist X ein topologischer Vektorraum und ist $\varphi : \mathcal{K}_0 \to X$ eine stetige, additive Abbildung, so existiert (genau) eine additive Fortsetzung von φ auf $\mathcal{R}$.*

Die durch

$$\chi(K) := \begin{cases} 1 & \text{für } K \in \mathcal{K}_0 \backslash \{\emptyset\} \\ 0 & \text{für } K = \emptyset \end{cases}$$

definierte Abbildung $\chi : \mathcal{K}_0 \to \mathbb{R}$ erfüllt offensichtlich die Voraussetzungen des obigen Satzes; ihre (hier mit demselben Symbol bezeichnete) additive Fortsetzung $\chi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ ist die *Euler-Charakteristik* auf dem Konvexring. Für einen weiteren elementaren Zugang zur Eulerschen Charakteristik auf $\mathcal{R}$ sehe man auch Hadwiger [11], S. 104 f.

3 Steiner-Formeln

Ist K ein konvexer Körper im euklidischen Raum, so ist nach der Steiner-Formel das Volumen des äußeren Parallelkörpers von K zum Abstand $\epsilon > 0$ durch ein Polynom in ϵ gegeben. Die Koeffizienten dieses Polynoms definieren die inneren Volumina (oder die Quermaßintegrale) von K. Auch das Lebesgue-Maß „lokaler" Parallelbereiche von K ist ein Polynom im Abstandsparameter. Durch die Koeffizienten wird man zu lokalen Gegenstücken der inneren Volumina geführt, den Krümmungs- und Oberflächenmaßen, und zu ihren gemeinsamen Verallgemeinerungen, den verallgemeinerten Krümmungsmaßen, die wir auch Stützmaße nennen. Ziel der Kapitel 3 und 4 ist es, ein Analogon der lokalen Steiner-Formel für sphärisch konvexe Körper zu zeigen und näher auf die Eigenschaften der dadurch definierten Maße und Funktionale einzugehen.

In Abschnitt 3.1 wird zunächst die lokale Steiner-Formel für sphärisch konvexe Körper gezeigt (Satz 3.1.1); durch sie werden die Stützmaße sphärisch konvexer Körper definiert. Es wird ferner gezeigt, daß sich die Stützmaße eines Parallelkörpers als Linearkombination der Stützmaße des Ausgangskörpers darstellen lassen (Satz 3.1.5). Eine dazu analoge Aussage für gewisse vektorwertige Funktionale sphärisch konvexer Körper wird in Abschnitt 3.2 bewiesen (Satz 3.2.1).

3.1 Die lokale Steiner-Formel

Es sei $K \in \mathcal{K}$ ein sphärisch konvexer Körper, und es sei ein ϵ mit $0 < \epsilon < \pi/2$ gegeben. Wir setzen

$$\Sigma := S^n \times S^n\,.$$

Für $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ definieren wir die *lokale Parallelmenge*

$$M_\epsilon(K,\eta) := \{x \in S^n : 0 < d(K,x) \le \epsilon, (p(K,x), u(K,x)) \in \eta\}\,.$$

Aus der Stetigkeit von $d(K,\cdot)$, $p(K,\cdot)$ und $u(K,\cdot)$ folgt, daß $M_\epsilon(K,\eta)$ eine Borel-Menge ist; durch

$$\mu_\epsilon(K,\eta) := \lambda^n(M_\epsilon(K,\eta))$$

wird daher ein endliches Borel-Maß $\mu_\epsilon(K,\cdot)$ auf Σ definiert.

Die angekündigte Version der sphärischen Steiner-Formel lautet mit diesen Bezeichnungen wie folgt:

Satz 3.1.1. *Zu $K \in \mathcal{K}$ existieren eindeutig bestimmte endliche Borel-Maße*

$$\Theta_0(K,\cdot), \ldots, \Theta_{n-1}(K,\cdot)$$

auf Σ *derart, daß für jedes* $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ *und für* $0 < \epsilon < \pi/2$ *das sphärische Lebesgue-Maß der lokalen Parallelmenge* $M_\epsilon(K,\eta)$ *gegeben ist durch*

$$\mu_\epsilon(K,\eta) = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \beta_{n-j-1} \Theta_j(K,\eta) \int_0^\epsilon \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt \,. \tag{3.1}$$

Das Maß $\Theta_j(K,\cdot)$ *heißt* j-tes Stützmaß *oder* j-tes verallgemeinertes Krümmungsmaß von K. *Es hängt schwach stetig von* $K \in \mathcal{K}$ *ab.*

Mit der im Satz behaupteten schwachen Stetigkeit der Θ_j ist das Folgende gemeint: Ist $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{K}$, die gegen $K \in \mathcal{K}$ strebt, so konvergiert die Folge $(\Theta_j(K_i,\cdot))_{i\in\mathbb{N}}$ von Maßen schwach gegen $\Theta_j(K,\cdot)$, vgl. etwa Gänssler & Stute [7], Abschnitt 8.4.

Die in der definierenden Gleichung gewählten Normierungen der Stützmaße werden sich später als vorteilhaft erweisen. Wir teilen den Beweis von Satz 3.1.1 in die nachfolgenden Hilfssätze auf. Mit $\mathbf{1}_A$ bezeichnen wir die Indikatorfunktion einer Menge A.

Hilfssatz 3.1.2. *Es sei* $P \in \mathcal{P}$ *und* $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$. *Definieren wir für* $j \in \{0,\dots,n-1\}$

$$\Theta_j(P,\eta) := \frac{1}{\beta_j \beta_{n-j-1}} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(P)} \int_F \int_{N(P,F)} \mathbf{1}_\eta(x,u) \, d\lambda^{n-j-1}(u) d\lambda^j(x) \,,$$

so gilt die Entwicklung (3.1) *für* $K = P$. *Es gilt stets* $\Theta_j(P,\Sigma) \leq 1$.

Beweis: Es sei $f : S^n \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, meßbare Funktion, und es sei $S \in \mathcal{S}_j$ mit $j \in \{0,\dots,n-1\}$. Wir zeigen die folgende Transformationsformel:

$$\int_{S^n} f \, d\lambda^n = \int_S \int_{S^* \vee \{x\}} \sin^j(d(S^*,u)) f(u) \, d\lambda^{n-j}(u) d\lambda^j(x) \,.$$

Zum Beweis setzen wir f durch

$$\bar{f}(x) := \|x\|^{-n} f(x/\|x\|) \quad \text{für } 0 < \|x\| \leq 1 \qquad \text{und } \bar{f}(x) := 0 \quad \text{sonst}$$

auf $\mathbb{R}^{n+1}$ fort, setzen $L := \operatorname{lin} S$ und bezeichnen mit $d^e(L^\perp, z)$ den euklidischen Abstand eines Punktes $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ zum orthogonalen Komplement $L^\perp$ von L. Anwendung des Satzes von Fubini und Transformation auf Polarkoordinaten ergibt

$$\begin{aligned}
\int_{S^n} f \, d\lambda^n &= \int_{S^n} \int_0^1 t^n f(x)/t^n \, dt \, d\lambda^n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \bar{f} \, d\lambda^{n+1} \\
&= \int_L \int_{L^\perp} \bar{f}(x+y) \, d\lambda^{n-j}(y) d\lambda^{j+1}(x) \\
&= \int_S \int_0^1 t^j \int_{L^\perp} \bar{f}(tx+y) \, d\lambda^{n-j}(y) dt d\lambda^j(x) \\
&= \int_S \int_{\mathrm{pos}(L^\perp \cup \{x\})} d^e(L^\perp, z)^j \bar{f}(z) \, d\lambda^{n-j+1}(z) d\lambda^j(x) \\
&= \int_S \int_{S^* \vee \{x\}} \int_0^1 t^{n-j} t^j \sin^j(d(S^*, u)) \bar{f}(tu) \, dt \, d\lambda^{n-j}(u) d\lambda^j(x) \\
&= \int_S \int_{S^* \vee \{x\}} \sin^j(d(S^*, u)) f(u) \, d\lambda^{n-j}(u) \, d\lambda^j(x) \, .
\end{aligned}$$

Nun sei $P \in \mathcal{P}$, und es sei $F \in \mathcal{F}_j(P)$ mit $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Setzen wir $S := S^n \cap \operatorname{lin} F \in \mathcal{S}_j$ und $A := p(P, \cdot)^{-1}(\operatorname{relint} F)$, so ergibt zweifache Anwendung der eben gezeigten Transformationsformel

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{p(P,\cdot)^{-1}(\text{relint } F)} f \, d\lambda^n \\
&= \int\limits_S \int\limits_{S^*\vee\{x\}} \mathbf{1}_A(u) f(u) \sin^j(d(S^*, u)) \, d\lambda^{n-j}(u) d\lambda^j(x) \\
&= \int\limits_S \int\limits_{S^*} \int\limits_{\{x,-x\}\vee\{u\}} \mathbf{1}_{A\cap(S^*\vee\{x\})}(v) f(v) \sin^j(d(S^*, v)) \sin^{n-j-1}(d(\{x,-x\}, v)) \\
&\qquad\qquad d\lambda^1(v) d\lambda^{n-j-1}(u) d\lambda^j(x) \\
&= \int\limits_S \int\limits_{S^*} \int\limits_{[x,u]} \mathbf{1}_A(v) f(v) \cos^j(d(S, v)) \sin^{n-j-1}(d(S, v)) \, d\lambda^1(v) d\lambda^{n-j-1}(u) d\lambda^j(x) \\
&= \int\limits_F \int\limits_{N(P,F)} \int\limits_0^{\pi/2} f(x\cos t + u \sin t) \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt \, d\lambda^{n-j-1}(u) d\lambda^j(x) \,, \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

wobei in der letzten Gleichung $\lambda^j(F) = \lambda^j(\text{relint } F)$ verwendet wurde (allgemein ist der Rand eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}$ stets eine λ^n-Nullmenge). Setzt man speziell $f = \mathbf{1}_{M_\epsilon(P,\eta)}$ mit $0 < \epsilon < \pi/2$ und $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, so folgt

$$
\begin{aligned}
&\lambda^n\Big(M_\epsilon(P,\eta) \cap p(P,\cdot)^{-1}(\text{relint } F)\Big) \\
&= \int\limits_F \int\limits_{N(P,F)} \mathbf{1}_\eta(x,u) \, d\lambda^{n-j-1}(u) d\lambda^j(x) \int\limits_0^\epsilon \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt \,.
\end{aligned}
$$

Es gilt bd $P = \cup_{j=0}^{n-1} \cup_{F\in\mathcal{F}_j(P)}$ relint F, und diese Vereinigung ist disjunkt. Daher ist

$$
\mu_\epsilon(P,\eta) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{F\in\mathcal{F}_j(P)} \lambda^n\Big(M_\epsilon(P,\eta) \cap p(P,\cdot)^{-1}(\text{relint } F)\Big) \,,
$$

und deshalb gilt wie behauptet

$$
\begin{aligned}
\mu_\epsilon(P,\eta) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{F\in\mathcal{F}_j(P)} \int\limits_F \int\limits_{N(P,F)} \mathbf{1}_\eta(x,u) \, d\lambda^{n-j-1}(u) d\lambda^j(x) \int\limits_0^\epsilon \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \beta_{n-j-1} \Theta_j(P,\eta) \int\limits_0^\epsilon \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt \,.
\end{aligned}
$$

Ist $S \in \mathcal{S}_i$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, so ist $\lim_{\epsilon \nearrow \pi/2} \mu_\epsilon(S, \Sigma) = \beta_n$ und $\Theta_j(S, \Sigma) = \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol bedeutet. Daher gilt $\int_0^{\pi/2} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \, dt = \beta_n / (\beta_i \beta_{n-i-1})$, und es folgt $\Theta_j(P, \Sigma) \leq 1$. ∎

Hilfssatz 3.1.3. *Für $0 < \epsilon < \pi/2$ hängt das Maß $\mu_\epsilon(K, \cdot)$ schwach stetig von $K \in \mathcal{K}$ ab.*

Beweis: Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $0 < \epsilon < \pi/2$. Wir zeigen:

$$\text{bd } (K_\epsilon) \text{ ist eine } \lambda^n\text{-Nullmenge.} \tag{3.3}$$

Dazu sei $0 < \delta < \pi/2 - \epsilon$ und $P \subset K$ ein Polytop mit $d(K, P) < \delta$. Dann gilt $P_\epsilon \subset K_\epsilon \subset P_{\epsilon+\delta}$, also wegen Hilfssatz 3.1.2

$$\begin{aligned} \lambda^n(\text{bd } K_\epsilon) &\leq \lambda^n(P_{\epsilon+\delta} \setminus \text{ int } P_\epsilon) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \beta_{n-j-1} \Theta_j(P, \Sigma) \int_\epsilon^{\epsilon+\delta} \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \beta_{n-j-1} \int_\epsilon^{\epsilon+\delta} \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt \,. \end{aligned}$$

Mit $\delta \searrow 0$ folgt (3.3).

Nun sei $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge konvexer Körper mit $\lim_{i \to \infty} K_i = K \in \mathcal{K}$, und $\eta \subset \Sigma$ sei eine offene Menge. Sei $x \in M_\epsilon(K, \eta)$ mit $d(K, x) < \epsilon$. Es gilt $d(K_i, x) \to d(K, x)$, $p(K_i, x) \to p(K, x)$ und $u(K_i, x) \to u(K, x)$ für $i \to \infty$ nach Hilfssatz 2.4. Für fast alle i ist deshalb $d(K_i, x) < \epsilon$ und $(p(K_i, x), u(K_i, x)) \in \eta$. Dies zeigt

$$M_\epsilon(K, \eta) \setminus \text{bd } (K_\epsilon) \subset \liminf_{i \to \infty} M_\epsilon(K_i, \eta) \,,$$

und somit gilt wegen (3.3)

$$\begin{aligned} \liminf_{i \to \infty} \mu_\epsilon(K_i, \eta) &= \liminf_{i \to \infty} \lambda^n(M_\epsilon(K_i, \eta)) \\ &\geq \lambda^n(\liminf_{i \to \infty} M_\epsilon(K_i, \eta)) \\ &\geq \lambda^n(M_\epsilon(K, \eta) \setminus \text{bd } (K_\epsilon)) \\ &= \mu_\epsilon(K, \eta) \,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die noch zu zeigende Gleichung

$$\lim_{i \to \infty} \mu_\epsilon(K_i, \Sigma) = \mu_\epsilon(K, \Sigma)$$

erhält man aus der Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
\mu_\epsilon(K,\Sigma) &\le \liminf_{i\to\infty} \mu_\epsilon(K_i,\Sigma) \le \limsup_{i\to\infty} \mu_\epsilon(K_i,\Sigma) \\
&= \limsup_{i\to\infty} (\beta_n(1 - V_n(K_i) - V_n(K_i^*)) - \mu_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}(K_i^*,\Sigma)) \\
&= \beta_n(1 - V_n(K) - V_n(K^*)) - \liminf_{i\to\infty} \mu_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}(K_i^*,\Sigma) \\
&\le \beta_n(1 - V_n(K) - V_n(K^*)) - \mu_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}(K^*,\Sigma) \\
&= \mu_\epsilon(K,\Sigma)\,;
\end{aligned}$$

hierbei haben wir die für beliebiges $K \in \mathcal{K}$ gültige Beziehung

$$\mu_\epsilon(K,\Sigma) = \beta_n(1 - V_n(K) - V_n(K^*)) - \mu_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}(K^*,\Sigma)\,,$$

die aus Hilfssatz 2.1 und (3.3) folgt, verwendet, ferner die Stetigkeit des Volumens, die Stetigkeit der Abbildung $K \mapsto K^*$ und zweimal die schon gezeigte Ungleichung (3.4). ■

Hilfssatz 3.1.4. *Ist X eine nichtleere Menge und sind $f_0,\dots,f_{n-1} : X \to \mathbb{R}$ linear unabhängige reelle Funktionen auf X, so existieren $x_0,\dots,x_{n-1} \in X$ derart, daß die Matrix $(f_i(x_j))_{i,j=0}^{n-1}$ invertierbar ist.*

Beweis: Sei $x_0 \in X$ mit $f_i(x_0) \neq 0$ für ein $i \in \{0,\dots,n-1\}$. Es seien nun schon $x_0,\dots,x_{k-1} \in X$, $k < n$, gewählt derart, daß $(f_i(x_j))_{(i,j)\in I_{n,k}}$ Rang k besitzt, wobei hier und im folgenden $I_{l,m} := \{0,\dots,l-1\} \times \{0,\dots,m-1\}$ für alle $l,m \in \mathbb{N}$ ist. Sei $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ eine nichttriviale Lösung der Gleichungen $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f_i(x_j) = 0$, $j \in \{0,\dots,k-1\}$. Angenommen, für jedes $x \in X$ existierten $g_0(x),\dots,g_{k-1}(x) \in \mathbb{R}$ mit $f_i(x) = \sum_{j=0}^{k-1} g_j(x) f_i(x_j)$ für alle $i \in \{0,\dots,n-1\}$, so wäre

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i f_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{j=0}^{k-1} g_j(x) f_i(x_j) = \sum_{j=0}^{k-1} g_j(x) \sum_{i=0}^{n-1} a_i f_i(x_j) = 0$$

für alle $x \in X$, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $f_0,\dots,f_{n-1}$. Es gibt daher ein $x_k \in X$ derart, daß $(f_i(x_j))_{(i,j)\in I_{n,k+1}}$ Rang $k+1$ besitzt. ■

Beweis von Satz 3.1.1*:* Für $j \in \{0,\dots,n-1\}$ und $0 < \epsilon < \pi/2$ setzen wir $f_j(\epsilon) := \beta_j \beta_{n-j-1} \int_0^\epsilon \cos^j t \sin^{n-j-1} t\, dt$. Einsetzen der Potenzreihen für sin und cos zeigt, daß f_j als Potenzreihe um 0 darstellbar ist, wobei der erste nichtverschwindende Koeffizient der von ϵ^{n-j} ist. Die Funktionen $f_0,\dots,f_{n-1}$ sind daher linear unabhängig, die Eindeutigkeitsaussage ist deshalb klar. Nach Hilfssatz 3.1.4 existieren $\epsilon_0,\dots,\epsilon_{n-1}$ mit $0 < \epsilon_i < \pi/2$, $i \in \{0,\dots,n-1\}$, derart, daß die Matrix $(f_j(\epsilon_i))_{i,j=0}^{n-1}$ eine Inverse, etwa $(a_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$, besitzt. Wegen Hilfssatz 3.1.2 gilt also für $P \in \mathcal{P}$

$$\Theta_j(P,\cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ji} \mu_{\epsilon_i}(P,\cdot), \qquad j \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Für beliebiges $K \in \mathcal{K}$ definieren wir nun auf $\mathcal{B}(\Sigma)$ die endlichen signierten Maße

$$\Theta_j(K,\cdot) := \sum_{i=0}^{n-1} a_{ji}\mu_{\epsilon_i}(K,\cdot), \qquad j \in \{0,\dots,n-1\}. \tag{3.5}$$

Mittels Approximation von K durch eine Polytopfolge sieht man, daß dies (positive) Maße sind, die wegen Hilfssatz 3.1.3 schwach stetig von K abhängen. Da die behauptete Gleichung für Polytope richtig ist, folgt sie nun auch allgemein. ∎

Für $0 < \epsilon < \pi/2$ ist der Parallelkörper K_ϵ eines sphärisch konvexen Körpers K i.a. nicht mehr in $\mathcal{K}$ enthalten (etwa sicher dann nicht, wenn K ein Polytop von positiver Dimension ist). Ist jedoch $K_\epsilon \in \mathcal{K}$, so kann man die Stützmaße von K_ϵ durch die von K ausdrücken. Dazu zunächst noch etwas Notation: Es sei V_2 die Menge aller Paare orthogonaler Einheitsvektoren, und die Abbildung $t_\epsilon : V_2 \to V_2$ sei für $0 < \epsilon < \pi/2$ gegeben durch

$$t_\epsilon(x,u) := (x\cos\epsilon + u\sin\epsilon, u\cos\epsilon - x\sin\epsilon)\,.$$

Weiter setzen wir für $i,j \in \{0,\dots,n-1\}$ und $0 < \epsilon < \pi/2$

$$\alpha_{nij}(\epsilon) := \frac{\beta_i\beta_{n-i-1}}{\beta_j\beta_{n-j-1}} \sum_{(k,l)\in T_{nij}} \binom{i}{k}\binom{n-i-1}{l}(-1)^{i-k}\cos^{n+k-i-l-1}\epsilon\,\sin^{i-k+l}\epsilon,$$

wobei summiert wird über $T_{nij} := \{(k,l) \in \{0,\dots,i\}\times\{0,\dots,n-i-1\} : k+l = j\}$.

Mit diesen Bezeichnungen lautet die angekündigte Steiner-Formel für Parallelkörper wie folgt.

Satz 3.1.5. *Ist $K \in \mathcal{K}$ und ist $0 < \epsilon < \pi/2$ mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$, so gilt für alle $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$ die Formel*

$$\Theta_j(K_\epsilon, t_\epsilon(\eta)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{nij}(\epsilon)\,\Theta_i(K,\eta)$$

für alle $j \in \{0,\dots,n-1\}$.

Beweis: Da die Abbildung t_ϵ ein Homöomorphismus ist, gilt $t_\epsilon(\eta) \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Sei $x \in S^n$ mit $\epsilon < d(K,x) < \pi/2$. Es gibt einen eindeutig bestimmten Punkt $y \in [x,p(K,x)] \cap \mathrm{bd}\,(K_\epsilon)$. Es gilt $p(K_\epsilon,x) = y$, denn andernfalls wäre $d(x,p(K_\epsilon,x)) < d(x,y)$, und mit $z := p(K,p(K_\epsilon,x))$ hätte man wegen

$$d(z,p(K_\epsilon,x)) = \epsilon \le d(y,p(K,x))$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} d(x,z) &\le d(x,p(K_\epsilon,x)) + d(p(K_\epsilon,x),z) \\ &< d(x,y) + d(y,p(K,x)) \\ &= d(x,p(K,x)) \end{aligned}$$

und somit einen Widerspruch (vgl. den Beweis von Theorem 4.2.2 in [39]). Wegen $d(p(K,x),y) = \epsilon$ erhält man damit $p(K_\epsilon,x) = p(K,x)\cos\epsilon + u(K,x)\sin\epsilon$, $u(K_\epsilon,x) = u(K,x)\cos\epsilon - p(K,x)\sin\epsilon$ und $d(K_\epsilon,x) = d(K,x) - \epsilon$. Für $0 < \delta < \pi/2 - \epsilon$ folgt $M_{\epsilon+\delta}(K,\eta) = M_\epsilon(K,\eta) \cup M_\delta(K_\epsilon, t_\epsilon(\eta))$, und diese Vereinigung ist disjunkt. Daher gilt $\mu_{\epsilon+\delta}(K,\eta) = \mu_\epsilon(K,\eta) + \mu_\delta(K_\epsilon, t_\epsilon(\eta))$. Anwenden der Steiner-Formel (3.1) ergibt einerseits

$$\mu_\delta(K_\epsilon, t_\epsilon(\eta)) = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \beta_{n-j-1} \Theta_j(K_\epsilon, t_\epsilon(\eta)) \int_0^\delta \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\mu_\delta(K_\epsilon, t_\epsilon(\eta)) &= \mu_{\epsilon+\delta}(K,\eta) - \mu_\epsilon(K,\eta) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \beta_{n-i-1} \Theta_i(K,\eta) \int_0^\delta \cos^i(\epsilon + t) \sin^{n-i-1}(\epsilon + t) \, dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \beta_{n-i-1} \Theta_i(K,\eta) \int_0^\delta \Bigg(\sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{n-i-1} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} (\sin\epsilon \sin t)^{i-k} (\cos\epsilon \cos t)^k \\
&\qquad \times \binom{n-i-1}{l} (\sin\epsilon \cos t)^l (\cos\epsilon \sin t)^{n-i-l-1} \Bigg) dt \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \beta_{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{nij}(\epsilon)\, \Theta_i(K,\eta) \int_0^\delta \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt
\end{aligned}$$

für $0 < \delta < \pi/2 - \epsilon$. Ein Vergleich der Koeffizienten von $\int_0^\delta \cos^j t \sin^{n-j-1} t \, dt$ ergibt nun die Behauptung. ■

Bemerkung: Man kann das Ergebnis von Satz 3.1.5 zum Anlaß nehmen, Stützmaße auch für Parallelkörper K_ϵ zu definieren, die nicht in $\mathcal{K}$ liegen: Ist $K \in \mathcal{K}$ beliebig und ist $0 < \epsilon < \pi/2$, so definieren wir $\Theta_j(K_\epsilon, \cdot)$, $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, als das Bildmaß von

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{nij}(\epsilon) \Theta_i(K, \cdot)\,,$$

aufgefaßt als signiertes Maß auf Nor K, unter der Abbildung

$$\operatorname{Nor} K \to \Sigma, \quad (x,u) \mapsto (x\cos\epsilon + u\sin\epsilon, u\cos\epsilon - x\sin\epsilon)\,.$$

(Für Parallelkörper K_ϵ ist $\Theta_j(K_\epsilon, \cdot)$ im Fall $j \leq n-2$ allerdings i.a. nur noch ein signiertes Maß.) Satz 3.1.5 zeigt gerade die Konsistenz dieser Definition, und seine Aussage ist nun für beliebige $K \in \mathcal{K}$ und $0 < \epsilon < \pi/2$ gültig.

Aus den Stützmaßen gewinnen wir nun durch Spezialisierung weitere Maße und Funktionale: Die durch

$$\begin{aligned}\Phi_j(K,A) &:= \Theta_j(K, A \times S^n), \qquad j \in \{0,\dots,n-1\},\\ \Phi_n(K,A) &:= \frac{1}{\beta_n}\lambda^n(K \cap A)\end{aligned}$$

auf $\mathcal{B}(S^n)$ definierten Maße nennen wir *Krümmungsmaße* und die Gesamtmaße

$$V_j(K) := \Phi_j(K, S^n), \qquad j \in \{0,\dots,n\},$$

nennen wir die *inneren Volumina* von $K \in \mathcal{K}$.

3.2 Steiner-Formeln für Krümmungsvektoren

Der Steiner-Formel für Stützmaße von Parallelkörpern kann man eine entsprechende Formel für vektorwertige Funktionale auf $\mathcal{K}$ an die Seite stellen.

Für $K \in \mathcal{K}$ und $j \in \{0, \ldots, n\}$ nennen wir den Vektor

$$k_j(K) := \int_{S^n} x \, d\Phi_j(K, x) \ \in \mathbb{R}^{n+1}$$

den *j-ten Krümmungsvektor* von K.

Ist $k_j(K) \neq o$, so ist also $k_j(K)/\|k_j(K)\| \in S^n$ der sphärische Schwerpunkt derjenigen Massenverteilung auf K, die dem j-ten Krümmungsmaß $\Phi_j(K, \cdot)$ entspricht. Das Verhalten der Krümmungsvektoren beim Übergang zu Parallelkörpern beschreibt nun der nachfolgende Satz.

Zu $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ und $0 < \epsilon < \pi/2$ definieren wir eine Zahl $\gamma_{nij}(\epsilon)$ wie folgt (α_{nij} sei dabei die vor Satz 3.1.5 definierte Funktion): Für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ sei

$$\begin{aligned}
\gamma_{nij}(\epsilon) &:= \alpha_{nij}(\epsilon) \cos \epsilon - \frac{i \beta_i \beta_{n-i-1}}{(n-i) \beta_{i-1} \beta_{n-i}} \alpha_{n(i-1)j}(\epsilon) \sin \epsilon, \qquad i \in \{1, \ldots, n-1\}, \\
\gamma_{n0j}(\epsilon) &:= \alpha_{n0j}(\epsilon) \cos \epsilon, \\
\gamma_{nnj}(\epsilon) &:= -\frac{n \beta_n \sin \epsilon}{2 \beta_{n-1}} \alpha_{n(n-1)j}(\epsilon),
\end{aligned}$$

und es sei

$$\begin{aligned}
\gamma_{nin}(\epsilon) &:= \frac{\beta_i \beta_{n-i-1}}{(n-i) \beta_n} \sin^{n-i} \epsilon \cos^i \epsilon, \qquad i \in \{0, \ldots, n-1\}, \\
\gamma_{nnn}(\epsilon) &:= \cos^n \epsilon .
\end{aligned}$$

Satz 3.2.1. *Ist $K \in \mathcal{K}$ und ist $0 < \epsilon < \pi/2$ mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$, so gilt*

$$k_j(K_\epsilon) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_{nij}(\epsilon) \, k_i(K)$$

für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Etwa für $n = 2$ errechnet man

$$\begin{pmatrix} k_0(K_\epsilon) \\ k_1(K_\epsilon) \\ k_2(K_\epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \epsilon & -2 \sin \epsilon \cos \epsilon & 2 \sin^2 \epsilon \\ \sin \epsilon \cos \epsilon & \cos^2 \epsilon - \sin^2 \epsilon & -2 \sin \epsilon \cos \epsilon \\ \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon & \sin \epsilon \cos \epsilon & \cos^2 \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0(K) \\ k_1(K) \\ k_2(K) \end{pmatrix},$$

für $n = 3$

$$\begin{pmatrix} k_0(K_\epsilon) \\ k_1(K_\epsilon) \\ k_2(K_\epsilon) \\ k_3(K_\epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3\epsilon & \frac{-3\pi}{4}\sin\epsilon\cos^2\epsilon & 3\sin^2\epsilon\cos\epsilon & \frac{-3\pi}{4}\sin^3\epsilon \\ \frac{4}{\pi}\sin\epsilon\cos^2\epsilon & \cos\epsilon(1-3\sin^2\epsilon) & \frac{4}{\pi}\sin\epsilon(1-3\cos^2\epsilon) & 3\sin^2\epsilon\cos\epsilon \\ \sin^2\epsilon\cos\epsilon & \frac{-\pi}{4}\sin\epsilon(1-3\cos^2\epsilon) & \cos\epsilon(1-3\sin^2\epsilon) & \frac{-3\pi}{4}\sin\epsilon\cos^2\epsilon \\ \frac{4}{3\pi}\sin^3\epsilon & \sin^2\epsilon\cos\epsilon & \frac{4}{\pi}\sin\epsilon\cos^2\epsilon & \cos^3\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0(K) \\ k_1(K) \\ k_2(K) \\ k_3(K) \end{pmatrix},$$

wenn man die rechten Seiten wie Matrizenprodukte liest.

Bemerkung: Wie wir schon früher angemerkt haben (vgl. die Bemerkung im Anschluß an Satz 3.1.5), kann man die Stützmaße in konsistenter Weise auch für beliebige Parallelkörper erklären. Durch die Spezialisierung $\Phi_j(K_\epsilon, A) := \Theta_j(K_\epsilon, A \times S^n)$ für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ und durch $\Phi_n(K_\epsilon, A) := \lambda^n(K_\epsilon \cap A)/\beta_n$, jeweils für $A \in \mathcal{B}(S^n)$, werden die Krümmungsmaße von Parallelkörpern definiert.

$$k_j(K_\epsilon) := \int_{S^n} x \, d\Phi_j(K_\epsilon, x), \quad j \in \{0, \ldots, n\},$$

sind dann die Krümmungsvektoren für allgemeine Parallelkörper K_ϵ. Wie man dem Beweis unmittelbar entnimmt, gilt nun Satz 3.2.1 auch dann, wenn $K_\epsilon \notin \mathcal{K}$ sein sollte.

Zum Beweis von Satz 3.2.1 ziehen wir die folgenden Hilfssätze heran:

Hilfssatz 3.2.2. *Für* $P \in \mathcal{P}$ *mit* int $P \neq \emptyset$ *gilt*

$$\int_P x \, d\lambda^n(x) = -\frac{1}{n} \sum_{F \in \mathcal{F}_{n-1}(P)} \lambda^{n-1}(F) \, u_F \,,$$

wobei $u_F \in S^n$ *der äußere Normalenvektor von* P *bei der Facette* $F \in \mathcal{F}_{n-1}(P)$ *ist.*

Beweis:[1] Es seien $e_1, \ldots, e_{n+1}$ die Standard-Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^{n+1}$, und es sei $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Wir definieren $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$f(x) := \|x\| \, e_i \,.$$

Die Funktion f ist in $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{o\}$ stetig differenzierbar, und mit $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ gilt

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \partial_j f_j(x) = \partial_i \|x\| = \frac{x_i}{\|x\|} \qquad \text{für } x \neq o \,.$$

[1] Das hier verwendete Argument verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Frau Dipl.-Math. Christina Bauer, vgl. auch Arnold [3], Satz 1.

Nun sei $0 < \delta < 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_P x_i \, d\lambda^n(x) &= \frac{n+1}{1-\delta^{n+1}} \int_\delta^1 \int_P r^n x_i \, d\lambda^n(x)\, dr \\
&= \frac{n+1}{1-\delta^{n+1}} \int_{\{\lambda x \,:\, x\in P,\, \delta\le\lambda\le 1\}} \frac{x_i}{\|x\|} \, d\lambda^{n+1}(x) \\
&= \frac{n+1}{1-\delta^{n+1}} \int_{\{\lambda x \,:\, x\in P,\, \delta\le\lambda\le 1\}} \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^{n+1}(x) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{n+1}{1-\delta^{n+1}} \Bigg(\sum_{F\in\mathcal{F}_{n-1}(P)} \int_{\{\lambda x \,:\, x\in F,\, \delta\le\lambda\le 1\}} \langle u_F, f(x)\rangle \, d\lambda^n(x) \\
&\qquad + \int_P \langle x, f(x)\rangle \, d\lambda^n(x) - \int_{\{\delta x \,:\, x\in P\}} \langle x, f(x)\rangle \, d\lambda^n(x) \Bigg) \\
&= \frac{n+1}{1-\delta^{n+1}} \Bigg(\sum_{F\in\mathcal{F}_{n-1}(P)} \int_\delta^1 \int_F \langle u_F, e_i\rangle r^n \, d\lambda^{n-1}(x)\, dr \\
&\qquad + (1-\delta^{n+1}) \int_P x_i \, d\lambda^n(x) \Bigg) \\
&= \sum_{F\in\mathcal{F}_{n-1}(P)} \lambda^{n-1}(F) \langle u_F, e_i\rangle + (n+1) \int_P x_i \, d\lambda^n(x)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir bei Gleichung $(*)$ den Gaußschen Divergenzsatz verwendet haben (zu der hier verwendeten Version vgl. etwa Kowalsky [18], S. 194). Multiplikation mit e_i und Summation über i ergibt nun die Behauptung. ∎

Hilfssatz 3.2.3. *Das Maß $\Phi_j(K,\cdot)$ hängt schwach stetig von $K \in \mathcal{K}$ ab für alle $j \in \{0,\dots,n\}$.*

Beweis: Für $j \in \{0,\dots,n-1\}$ folgt die schwache Stetigkeit von $K \mapsto \Phi_j(K,\cdot)$ aus der von $K \mapsto \Theta_j(K,\cdot)$. Sei $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{K}$ mit $\lim_{i\to\infty} K_i = K \in \mathcal{K}$. Ist $A \subset S^n$ offen, so gilt

$$(K \cap A)\backslash \operatorname{bd} K \subset \liminf_{i\to\infty} (K_i \cap A)$$

und daher

$$\begin{aligned}
\liminf_{i\to\infty} \Phi_n(K_i, A) &= \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{\beta_n}\,\lambda^n(K_i\cap A) \geq \frac{1}{\beta_n}\,\lambda^n(\liminf_{i\to\infty}(K_i\cap A)) \\
&\geq \frac{1}{\beta_n}\,\lambda^n(K\cap A) = \Phi_n(K,A)\,.
\end{aligned}$$

Die Beziehung $\lim_{i\to\infty}\Phi_n(K_i, S^n) = \Phi_n(K, S^n)$ folgt aus der Stetigkeit des Volumens. Damit ist auch die schwache Stetigkeit von $K \mapsto \Phi_n(K,\cdot)$ gezeigt. ■

Hilfssatz 3.2.4. *Für $K \in \mathcal{K}$ gilt*

$$\begin{aligned}
k_j(K) &= -\frac{(n-j)\beta_{n-j}\beta_{j-1}}{j\beta_j\beta_{n-j-1}}\,k_{n-j}(K^*) \qquad (j\in\{1,\dots,n-1\})\,,\\
k_n(K) &= -\frac{2\beta_{n-1}}{n\beta_n}\,k_0(K^*)\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Es sei zunächst $P \in \mathcal{P}$. Ist $F \in \mathcal{F}_j(P)$ und $V \in \mathcal{F}_{j-1}(F)$ für $j \in \{1,\dots,n-1\}$, so sei $u_{F,V}$ der äußere Normalenvektor der Seite F bei ihrer Facette V, d.h. $u_{F,V}$ ist derjenige Vektor in der 0-Untersphäre $(\mathrm{lin}\ F)\cap(\mathrm{lin}\ V)^\perp\cap S^n$, für den $u_{F,V}\in F^*$ gilt. Ist $G := N(P,V)\in\mathcal{F}_{n-j}(P^*)$ und $W := N(P,F)\in\mathcal{F}_{n-j-1}(G)$, so gilt

$$(\mathrm{lin}\ F)\cap(\mathrm{lin}\ V)^\perp\cap S^n = (\mathrm{lin}\ G)\cap(\mathrm{lin}\ W)^\perp\cap S^n \in \mathcal{S}_0\,.$$

Für $u\in S^n$ sei H_u^- wie vereinbart die Halbsphäre mit Normalenvektor u. Für jedes $u\in G = N(P,V)$ ist $F\subset H_u^-$ und daher $u\in F^*$. Wegen $u_{F,V}\in F^*$ und $F^*\in\mathcal{K}\backslash\{S^n\}$ ist deshalb $\langle u, u_{F,V}\rangle \geq 0$. Damit gilt $G\subset H^-_{-u_{F,V}}$ und somit $\mathrm{int}\ (H^-_{u_{F,V}})\cap G = \emptyset$. Andererseits gilt für den äußeren Normalenvektor $u_{G,W}$ der Seite G von P^* bei ihrer Facette W nach Definition $\mathrm{int}\ (H^-_{u_{G,W}})\cap G \neq \emptyset$. Damit muß $u_{F,V}\neq u_{G,W}$ gelten und somit

$$u_{G,W} = -u_{F,V}\,.$$

Anwendung von Hilfssatz 3.2.2 in niederdimensionalen Untersphären ergibt daher

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S^n} x\, d\Phi_j(P,x) &= \frac{1}{\beta_j\beta_{n-j-1}} \sum_{F\in\mathcal{F}_j(P)} \lambda^{n-j-1}(N(P,F)) \int\limits_F x\, d\lambda^j(x) \\
&= -\frac{1}{\beta_j\beta_{n-j-1}} \sum_{F\in\mathcal{F}_j(P)} \lambda^{n-j-1}(N(P,F))\, \frac{1}{j} \sum_{V\in\mathcal{F}_{j-1}(F)} \lambda^{j-1}(V)\, u_{F,V} \\
&= -\frac{1}{j\beta_j\beta_{n-j-1}} \sum_{\substack{F\in\mathcal{F}_j(P),V\in\mathcal{F}_{j-1}(P)\\ V\in\mathcal{F}(F)}} \lambda^{n-j-1}(N(P,F))\lambda^{j-1}(V)\, u_{F,V} \\
&= \frac{1}{j\beta_j\beta_{n-j-1}} \sum_{\substack{G\in\mathcal{F}_{n-j}(P^*),W\in\mathcal{F}_{n-j-1}(P^*)\\ W\in\mathcal{F}(G)}} \lambda^{n-j-1}(W)\lambda^{j-1}(N(P^*,G))\, u_{G,W} \\
&= -\frac{n-j}{j\beta_j\beta_{n-j-1}} \sum_{G\in\mathcal{F}_{n-j}(P^*)} \lambda^{j-1}(N(P^*,G)) \int\limits_G x\, d\lambda^{n-j}(x) \\
&= -\frac{(n-j)\beta_{n-j}\beta_{j-1}}{j\beta_j\beta_{n-j-1}} \int\limits_{S^n} x\, d\Phi_{n-j}(P^*,x)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die explizite Darstellung der Krümmungsmaße für den Fall von Polytopen aus Hilfssatz 3.1.2 verwendet haben. Aus dieser Darstellung und aus Hilfssatz 3.2.2 folgt

$$\begin{aligned}
k_n(P) &= \frac{1}{\beta_n}\int\limits_P x\, d\lambda^n(x) = -\frac{1}{n\beta_n}\sum_{F\in\mathcal{F}_{n-1}(P)} \lambda^{n-1}(F)u_F \\
&= -\frac{1}{n\beta_n}\sum_{\{x\}\in\mathcal{F}_0(P^*)} \lambda^{n-1}(N(P^*,x))x = -\frac{2\beta_{n-1}}{n\beta_n}\int\limits_{S^n} x\, d\Phi_0(P^*,x) \\
&= -\frac{2\beta_{n-1}}{n\beta_n} k_0(P^*)
\end{aligned}$$

im Falle $\operatorname{int} P \neq \emptyset$ (wie in Hilfssatz 3.2.2 sei u_F der äußere Normalenvektor von P bei der Facette $F \in \mathcal{F}_{n-1}(P)$). Für $\operatorname{int} P = \emptyset$ ist $k_n(P) = o$. Ist $\dim P = n-1$, so ist $\mathcal{F}_0(P^*) = \{\{x\},\{-x\}\}$ für ein $x \in S^n$, und es gilt $N(P^*,x) = N(P^*,-x) = P$. Damit ist $k_0(P^*) = o$. Im Fall $\dim P < n-1$ ist $\mathcal{F}_0(P^*) = \emptyset$, auch hier gilt also $k_0(P^*) = o$.

Die behaupteten Gleichungen gelten also für Polytope. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $K \mapsto K^*$ und der schwachen Stetigkeit der Krümmungsmaße folgt nun aber die allgemeine Behauptung. ■

Der folgende Hilfssatz stellt einerseits eine Verallgemeinerung der lokalen Steiner-Formel (3.1) dar, er kann andererseits aber auch, wie die sich dem Beweis anschließende Bemerkung zeigt, als Darstellung einer Zerlegung des sphärischen Lebesgue-Maßes mit Hilfe der $(n-1)$-ten Krümmungsmaße von Parallelkörpern interpretiert werden.

Hilfssatz 3.2.5. *Ist $K \in \mathcal{K}$ und ist $f : S^n \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, meßbare Funktion, so gilt*

$$\begin{aligned}\int\limits_{S^n} f\, d\lambda^n \;&=\; \beta_n\Big(\int\limits_{S^n} f\, d\Phi_n(K,\cdot) + \int\limits_{S^n} f\, d\Phi_n(K^*,\cdot)\Big)\\ &\quad+\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\beta_{n-i-1}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^i t\sin^{n-i-1} t\int\limits_{\Sigma} f(x\cos t + u\sin t)\, d\Theta_i(K,(x,u))\, dt\,.\end{aligned}$$

Beweis: Es sei f zunächst zusätzlich als stetig vorausgesetzt. Für $P \in \mathcal{P}$ gilt

$$f = \sum_{i=0}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}_i(P)} f\cdot \mathbf{1}_{p(P,\cdot)^{-1}(\mathrm{relint}\ F)} + f\cdot\mathbf{1}_{P^*}\ .$$

Es gilt $\int_{\mathrm{int}\ P} f\, d\lambda^n = \beta_n\int_{S^n} f\, d\Phi_n(P,\cdot)$ und $\int_{P^*} f\, d\lambda^n = \beta_n\int_{S^n} f\, d\Phi_n(P^*,\cdot)$. Sei $i \in \{0,\dots,n-1\}$. Aus Gleichung (3.2) im Beweis von Hilfssatz 3.1.2 folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{F\in\mathcal{F}_i(P)} \int\limits_{p(P,\cdot)^{-1}(\mathrm{relint}\ F)} f\, d\lambda^n \\
&= \sum_{F\in\mathcal{F}_i(P)} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_F \int\limits_{N(P,F)} \cos^i t \sin^{n-i-1} t\, f(x\cos t + u\sin t)\, d\lambda^{n-i-1}(u) d\lambda^i(x) dt \\
&= \beta_i\beta_{n-i-1} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \int\limits_\Sigma f(x\cos t + u \sin t)\ d\Theta_i(P,(x,u))dt\,.
\end{aligned}$$

Summation ergibt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S^n} f\, d\lambda^n &= \beta_n\Big(\int\limits_{S^n} f\, d\Phi_n(P,\cdot) + \int\limits_{S^n} f\, d\Phi_n(P^*,\cdot)\Big) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\beta_{n-i-1} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \int\limits_\Sigma f(x\cos t + u\sin t)\, d\Theta_i(P,(x,u))dt\,.
\end{aligned}$$

Approximation von K durch Polytope ergibt nun wegen der Stetigkeit der Abbildung $K \mapsto K^*$ und der schwachen Stetigkeit der Stützmaße die Behauptung für stetiges f. Da sich die Indikatorfunktion einer abgeschlossenen Menge $A \subset S^n$ als Grenzwert einer absteigenden Folge von stetigen, nichtnegativen Funktionen darstellen läßt, zeigt eine Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz und des Eindeutigkeitssatzes der Maßtheorie die behauptete Gleichung für Indikatorfunktionen von Borel-Mengen und damit auch für Elementarfunktionen. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt nun die Behauptung allgemein für nichtnegative, meßbare Funktionen. ■

Bemerkung: Verwendet man Stützmaße von Parallelkörpern (vgl. die Bemerkungen auf S. 22 und S. 25), so kann man die Formel aus Hilfssatz 3.2.5 auch in Gestalt einer Zerlegung der Einschränkung von λ^n auf $S^n \backslash (K \cup K^*)$ durch die $(n-1)$-ten Krümmungsmaße der Parallelkörper von K schreiben: Nach Definition gilt nämlich

$$\Theta_{n-1}(K_\epsilon, t_\epsilon(\eta)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ni(n-1)}(\epsilon)\Theta_i(K,\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta_i\beta_{n-i-1}}{2\beta_{n-1}} \cos^i \epsilon \sin^{n-i-1} \epsilon\, \Theta_i(K,\eta)$$

für alle $K \in \mathcal{K}$, $0 < \epsilon < \pi/2$ und $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$. Aus Hilfssatz 3.2.5 ergibt sich daher nach Anwendung des Transformationssatzes für Integrale

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{S^n\setminus(K\cup K^*)} f\,d\lambda^n \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\beta_{n-i-1} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \int\limits_\Sigma f(x\cos t + u\sin t)\,d\Theta_i(K,(x,u))dt \\
&= 2\beta_{n-1} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_\Sigma f(x)\,d\Theta_{n-1}(K_\epsilon,(x,u))d\epsilon \\
&= 2\beta_{n-1} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_{S^n} f\,d\Phi_{n-1}(K_\epsilon,\cdot)\,d\epsilon
\end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{K}$ und alle nichtnegativen, meßbaren Funktionen $f : S^n \to \mathbb{R}$. Für ein verwandtes Ergebnis vgl. die Bemerkung auf S. 47.

Beweis von Satz 3.2.1*:* Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $0 < \epsilon < \pi/2$ mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$. Ferner sei $j \in \{0,\dots,n-1\}$. Die Gleichung $\int_\Sigma u\,d\Theta_j(K,(x,u)) = \int_{S^n} x\,d\Phi_{n-j-1}(K^*,x)$ folgt in direkter Weise aus Satz 4.1.2. (Diesen Satz, der die Beziehung zwischen den Stützmaßen von K und K^* beschreibt, wollen wir erst im nächsten Kapitel beweisen.) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
k_j(K_\epsilon) &= \int\limits_{S^n} x\,d\Phi_j(K_\epsilon,x) = \int\limits_\Sigma x\,d\Theta_j(K_\epsilon,(x,u)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{nij}(\epsilon) \int\limits_\Sigma (x\cos\epsilon + u\sin\epsilon)\,d\Theta_i(K,(x,u)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{nij}(\epsilon)\Big(\cos\epsilon \int\limits_\Sigma x\,d\Theta_i(K,(x,u)) + \sin\epsilon \int\limits_\Sigma u\,d\Theta_i(K,(x,u))\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{nij}(\epsilon)\Big(\cos\epsilon \int\limits_{S^n} x\,d\Phi_i(K,x) + \sin\epsilon \int\limits_{S^n} x\,d\Phi_{n-i-1}(K^*,x)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{nij}(\epsilon)(\cos\epsilon\, k_i(K) + \sin\epsilon\, k_{n-i-1}(K^*)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_{nij}(\epsilon)\Big(\cos\epsilon\, k_i(K) - \frac{(i+1)\beta_{i+1}\beta_{n-i-2}}{(n-i-1)\beta_i\beta_{n-i-1}} \sin\epsilon\, k_{i+1}(K)\Big) \\
&\qquad\qquad + \alpha_{n(n-1)j}(\epsilon)\Big(\cos\epsilon\, k_{n-1}(K) - \frac{n\beta_{n-1}\sin\epsilon}{2\beta_{n-1}}\, k_n(K)\Big)\,;
\end{aligned}$$

verwendet wurden dabei die Definition der Φ_i als Spezialisierung der Θ_i, Satz 3.1.5 und Hilfssatz 3.2.4.

Für $j = n$ erhalten wir unter zusätzlicher Verwendung von Hilfssatz 3.2.5

$$\begin{aligned}
k_n(K_\epsilon) &= \int_{S^n} x\, d\Phi_n(K_\epsilon, x) = \frac{1}{\beta_n} \int_{K_\epsilon} x\, d\lambda^n(x) \\
&= \int_{S^n} x\, d\Phi_n(K, x) \\
&\quad + \frac{1}{\beta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \beta_{n-i-1} \int_0^\epsilon \cos^i t \sin^{n-i-1} t \int_\Sigma (x \cos t + u \sin t)\, d\Theta_i(K, (x, u)) dt \\
&= k_n(K) + \frac{1}{\beta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \beta_{n-i-1} \Big(\int_0^\epsilon \cos^{i+1} t \sin^{n-i-1} t\, dt\, k_i(K) \\
&\qquad + \int_0^\epsilon \cos^i t \sin^{n-i} t\, dt\, k_{n-i-1}(K^*) \Big) \\
&= k_n(K) + \frac{1}{\beta_n} \sum_{i=0}^{n-2} \Big(\beta_i \beta_{n-i-1} \int_0^\epsilon \cos^{i+1} t \sin^{n-i-1} t\, dt\, k_i(K) \\
&\qquad - \frac{(i+1)\beta_{i+1}\beta_{n-i-2}}{n-i-1} \int_0^\epsilon \cos^i t \sin^{n-i} t\, dt\, k_{i+1}(K) \Big) \\
&\qquad + \frac{2\beta_{n-1}}{\beta_n} \int_0^\epsilon \cos^n t\, dt\, k_{n-1}(K) - n \int_0^\epsilon \cos^{n-1} t \sin t\, dt\, k_n(K)\,.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten lassen sich nun ablesen, wenn man für $i \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\int_0^\epsilon \Big(\cos^{i+1} t \sin^{n-i-1} t - \frac{i}{n-i} \cos^{i-1} t \sin^{n-i+1} t \Big)\, dt = \frac{1}{n-i} \sin^{n-i} \epsilon \cos^i \epsilon$$

und $n \int_0^\epsilon \sin t \cos^{n-1} t\, dt = 1 - \cos^n \epsilon$ berücksichtigt. ■

Literaturhinweise zu Kapitel 3

Erste Versionen einer Steiner-Formel in nichteuklidischen Räumen konstanter Krümmung wurden von Weyl [48], Herglotz [14], Hadwiger [10], Vidal Abascal [46] und

Allendoerfer [1] angegeben. So drückt etwa Allendoerfer unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen Volumen und Oberfläche des Parallelbereichs kompakter orientierbarer Hyperflächen in Raumformen durch die klassischen Krümmungsintegrale aus. In neuerer Zeit wurde von Kohlmann [17] eine lokale Steiner-Formel für sogenannte Mengen positiver Reichweite in Raumformen bewiesen. Wegen der Allgemeinheit der dort betrachteten Mengen müssen in [17] aufwendigere Techniken aus Differentialgeometrie und geometrischer Maßtheorie eingesetzt werden. Im Gegensatz dazu kommt der in dieser Arbeit gewählte Zugang zu Stützmaßen sphärisch konvexer Körper – methodisch ähnlich wie in Schneider [39], Kapitel 4, für den euklidischen Raum – mit elementaren geometrischen und maßtheoretischen Hilfsmitteln aus.

Entsprechungen zu der globalen Version von Satz 3.1.5, der Steiner-Formel für Parallelkörper, haben Santaló [25] und Meyer [23] für den Fall glatt berandeter Bereiche angegeben. Unter dem Namen Quermaßvektoren wurden in allgemeinerem Rahmen von Schneider [32] euklidische Analoga unserer Krümmungsvektoren eingeführt und auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Man findet in dieser Arbeit auch eine Entsprechung unseres Satzes 3.2.1 im euklidischen Raum ([32], Formel (27)). Für 2- und 3-dimensionale Sphären hat Arnold [3] die Steiner-Formel für Krümmungsvektoren unter Einsatz differentialgeometrischer Techniken erhalten, und er hat gezeigt, daß für diese Dimensionen die Transformationsmatrizen bei geeigneter Basiswahl Drehungen aus SO_3 bzw. SO_4 beschreiben.

4 Stützmaße, Krümmungsmaße, innere Volumina

Wir untersuchen in diesem Kapitel die Stützmaße Θ_j, die Krümmungsmaße Φ_j und die inneren Volumina V_j auf ihre Eigenschaften, vor allem im Hinblick auf Anwendungen bei den in den Kapiteln 5 bis 7 zu behandelnden integralgeometrischen Formeln. In Abschnitt 4.1 gehen wir auf allgemeine Eigenschaften der einzelnen Maße und Funktionale ein. Wie sich in Abschnitt 4.2 zeigt, sind einige dieser Eigenschaften fundamental in dem Sinn, daß sich Linearkombinationen der Stütz- und Krümmungsmaße durch diese Eigenschaften charakterisieren lassen. Für spätere Anwendungen wichtig ist die Gauß-Bonnet-Formel für Mengen des Konvexrings, die in Abschnitt 4.3 bewiesen wird; diese Formel beschreibt die Euler-Charakteristik von Mengen des Konvexrings als Linearkombination ihrer inneren Volumina. Abschließend gehen wir in Abschnitt 4.4 kurz auf geometrische Interpretationen der Stütz- und Krümmungsmaße ein, die in gewissen Spezialfällen möglich sind.

4.1 Einige grundlegende Eigenschaften

Wir stellen einige wichtige Eigenschaften der Stützmaße im folgenden Satz zusammen.

Satz 4.1.1. *Für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt:*

(a) *Θ_j ist drehkovariant, d.h. es gilt $\Theta_j(\rho K, \rho\eta) = \Theta_j(K, \eta)$ für alle $K \in \mathcal{K}$, $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ und $\rho \in SO_{n+1}$, wobei $\rho\eta := \{(\rho x, \rho u) \in \Sigma : (x, u) \in \eta\}$ ist.*

(b) *Das Maß $\Theta_j(K, \cdot)$ ist auf der Menge* Nor K *aller Stützelemente von K konzentriert.*

(c) *Θ_j ist lokal erklärt, d.h. ist $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ und sind $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $\eta \cap \operatorname{Nor} K = \eta \cap \operatorname{Nor} K'$, so gilt $\Theta_j(K, \eta) = \Theta_j(K', \eta)$.*

(d) *Θ_j ist stetig, d.h. das Maß $\Theta_j(K, \cdot)$ hängt schwach stetig von $K \in \mathcal{K}$ ab.*

(e) *Θ_j ist additiv, d.h. für alle $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $K \cup K' \in \mathcal{K}$ gilt*

$$\Theta_j(K \cup K', \cdot) + \Theta_j(K \cap K', \cdot) = \Theta_j(K, \cdot) + \Theta_j(K', \cdot).$$

Die analogen Eigenschaften gelten auch für das Funktional des lokalen Parallelvolumens $\mu_\epsilon : \mathcal{K} \times \mathcal{B}(\Sigma) \to \mathbb{R}$, $0 < \epsilon < \pi/2$.

Beweis: Da sich die Θ_j nach Gleichung (3.5) als Linearkombination gewisser μ_{ϵ_i}, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, darstellen lassen, genügt es, die Eigenschaften (a) – (e) jeweils nur für die Abbildung $\mu_\epsilon : \mathcal{K} \times \mathcal{B}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ nachzuweisen.

Es gilt stets $M_\epsilon(\rho K, \rho\eta) = \rho M_\epsilon(K,\eta)$, und aus der Drehinvarianz des sphärischen Lebesgue-Maßes folgt (a). Für $K \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ mit $\eta \cap \mathrm{Nor}\, K = \emptyset$ gilt $M_\epsilon(K,\eta) = \emptyset$, und daher folgt (b). Ist $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ und sind $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $\eta \cap \mathrm{Nor}\, K = \eta \cap \mathrm{Nor}\, K'$, so gilt $M_\epsilon(K,\eta) = M_\epsilon(K',\eta)$ und daher (c). Eigenschaft (d) haben wir schon früher gezeigt und benutzt. Zum Nachweis von (e) sei $I_\epsilon(K,\eta,\cdot)$ die Indikatorfunktion der Menge $M_\epsilon(K,\eta)$. Es sei $x \in S^n$, und es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $K \cup K' \in \mathcal{K}$. Ist einerseits $d(K,x), d(K',x) < \pi/2$ und ist etwa $y := p(K \cup K', x) \in K$, so gilt $p(K \cup K', x) = p(K,x)$, und wie im Beweis von Theorem 4.1.3 in [39] zeigt man $p(K \cap K', x) = p(K',x)$. Wir erhalten $d(K \cup K', x) = d(K,x)$, $d(K \cap K', x) = d(K',x)$, $u(K \cup K', x) = u(K,x)$ und $u(K \cap K', x) = u(K',x)$ und daher

$$I_\epsilon(K \cup K', \eta, x) = I_\epsilon(K,\eta,x), \qquad I_\epsilon(K \cap K', \eta, x) = I_\epsilon(K',\eta,x)\,.$$

Ist andererseits etwa $d(K',x) \geq \pi/2$, so gelten die letzten beiden Gleichungen trivialerweise. Damit gilt

$$I_\epsilon(K \cup K', \eta, \cdot) + I_\epsilon(K \cap K', \eta, \cdot) = I_\epsilon(K,\eta,\cdot) + I_\epsilon(K',\eta,\cdot)\,.$$

Integration dieser Gleichung bezüglich λ^n ergibt die Behauptung. ∎

Der folgende Satz beschreibt die Beziehung zwischen den Stützmaßen eines konvexen Körpers K und seines Polarkörpers K^* (wir haben diese Aussage bereits im Beweis von Satz 3.2.1 benutzt).

Satz 4.1.2. *Für $K \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ gilt*

$$\Theta_j(K,\eta) = \Theta_{n-j-1}(K^*, \eta^{-1})$$

für $j \in \{0,\ldots,n-1\}$, wobei $\eta^{-1} := \{(u,x) \in \Sigma : (x,u) \in \eta\}$ ist.

Beweis: Es sei $P \in \mathcal{P}$ und $j \in \{0,\ldots,n-1\}$. Für $F \in \mathcal{F}_j(P)$ gilt

$$N(P,F) \in \mathcal{F}_{n-j-1}(P^*) \qquad \text{und} \qquad F = N(P^*, N(P,F)).$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\Theta_j(P,\eta) &= \frac{1}{\beta_j\beta_{n-j-1}} \sum_{F\in\mathcal{F}_j(P)} \int_F \int_{N(P,F)} \mathbf{1}_\eta(x,u)\, d\lambda^{n-j-1}(u) d\lambda^j(x) \\
&= \frac{1}{\beta_j\beta_{n-j-1}} \sum_{F\in\mathcal{F}_j(P)} \int_{N(P,F)} \int_F \mathbf{1}_{\eta^{-1}}(u,x)\, d\lambda^j(x) d\lambda^{n-j-1}(u) \\
&= \frac{1}{\beta_j\beta_{n-j-1}} \sum_{G\in\mathcal{F}_{n-j-1}(P^*)} \int_G \int_{N(P^*,G)} \mathbf{1}_{\eta^{-1}}(u,x)\, d\lambda^j(x) d\lambda^{n-j-1}(u) \\
&= \Theta_{n-j-1}(P^*, \eta^{-1})\,.
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildung $K \mapsto K^*$ und der Stetigkeit der Θ_j folgt die behauptete allgemeinere Gleichung durch Approximation. ■

Analoge Eigenschaften zu denen der Stützmaße Θ_j gelten auch für die Krümmungsmaße Φ_j :

Satz 4.1.3. *Für $j \in \{0, \dots, n\}$ gilt:*

(a) *Φ_j ist drehkovariant, d.h. es gilt $\Phi_j(\rho K, \rho A) = \Phi_j(K, A)$ für alle $K \in \mathcal{K}$, $A \in \mathcal{B}(S^n)$ und $\rho \in SO_{n+1}$.*

(b) *Das Maß $\Phi_j(K, \cdot)$ ist auf K konzentriert; für $j < n$ ist $\Phi_j(K, \cdot)$ auf* bd K *konzentriert.*

(c) *Φ_j ist lokal erklärt, d.h. ist $B \subset S^n$ offen und sind $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $K \cap B = K' \cap B$, so gilt $\Phi_j(K, A) = \Phi_j(K', A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(S^n)$ mit $A \subset B$.*

(d) *Φ_j ist stetig, d.h. das Maß $\Phi_j(K, \cdot)$ hängt schwach stetig von $K \in \mathcal{K}$ ab.*

(e) *Φ_j ist additiv, d.h. für alle $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $K \cup K' \in \mathcal{K}$ gilt*

$$\Phi_j(K \cup K', \cdot) + \Phi_j(K \cap K', \cdot) = \Phi_j(K, \cdot) + \Phi_j(K', \cdot).$$

Beweis: Bis auf (c) folgen die Aussagen aus Satz 4.1.1, oder sie wurden schon früher gezeigt. Ist $B \subset S^n$ offen und sind $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $K \cap B = K' \cap B$, so ist $M_\epsilon(K, A \times S^n) = M_\epsilon(K', A \times S^n)$ und $K \cap A = K' \cap A$ für $0 < \epsilon < \pi/2$ und $A \in \mathcal{B}(S^n)$ mit $A \subset B$. Daraus folgt Eigenschaft (c). ■

Aus Satz 4.1.3 folgen die Eigenschaften Drehinvarianz, Stetigkeit und Additivität der inneren Volumina V_j. Die Wahl der Bezeichnung „inneres Volumen" wird motiviert durch die folgenden beiden Eigenschaften: Die Zahl $V_j(K)$ ist unabhängig von der Dimension der umgebenden Sphäre,[2] und für $K \in \mathcal{K}$ mit $\dim K = j$ ist $V_j(K)$ das normierte j-dimensionale Volumen von K. Für Polytope folgt beides aus der Darstellung der Stützmaße von Hilfssatz 3.1.2, wobei man für die Unabhängigkeit von der Dimension der umgebenden Sphäre den Satz von Fubini heranzuziehen hat, und wegen der Stetigkeit gilt dies dann auch allgemein. Es gilt

$$V_j(S) = \delta_{ij} \quad \text{für } S \in \mathcal{S}_i,\ i \in \{-1, \dots, n\},\ j \in \{0, \dots, n\},$$

insbesondere also $V_j(\emptyset) = 0$ für $j \in \{0, \dots, n\}$ und $V_j(S^n) = 0$ für $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Aus Satz 4.1.2 folgt

$$V_j(K) = V_{n-j-1}(K^*) \tag{4.1}$$

[2] Dies trifft im übrigen auch auf $\Phi_j(K, A)$ zu.

für $K \in \mathcal{K}$ und $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Im Gegensatz zu ihren euklidischen Analoga sind die sphärischen inneren Volumina i.a. nicht monoton. Betrachten wir etwa den Fall einer sphärischen Kugel B_r mit Radius r, $0 \le r \le \pi/2$, so erhalten wir aus

$$\begin{aligned}
\mu_\epsilon(B_r, \Sigma) &= \beta_{n-1} \int_0^\epsilon \sin^{n-1}(r+t)\, dt \\
&= \beta_{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \cos^{n-j-1} r \sin^j r \int_0^\epsilon \cos^j t \sin^{n-j-1} t\, dt
\end{aligned}$$

durch Vergleich mit der Steiner-Formel

$$V_j(B_r) = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_j \beta_{n-j-1}} \binom{n-1}{j} \cos^{n-j-1} r \sin^j r, \qquad j \in \{0, \ldots, n-1\}. \tag{4.2}$$

Für $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ ist also V_j nicht monoton. Es wird später klar werden (s. die Bemerkung im Anschluß an Korollar 5.2.5), daß V_{n-1} auf $\mathcal{K} \backslash \mathcal{S}$ monoton wachsend bez. der Inklusion ist; wegen (4.1) impliziert dies eine entsprechende Monotonieeigenschaft von V_0.

Wir merken noch an, daß aus Satz 2.6 in direkter Weise die Existenz von additiven Fortsetzungen der Stützmaße auf den Konvexring $\mathcal{R}$ folgt.

Satz 4.1.4. *Die Stützmaße Θ_j (und damit auch die Krümmungsmaße Φ_j und die inneren Volumina V_j) besitzen eindeutig bestimmte additive Fortsetzungen auf den Konvexring $\mathcal{R}$.*

Die Fortsetzungen auf $\mathcal{R}$ bezeichnen wir weiter mit den Symbolen Θ_j, Φ_j und V_j.

4.2 Charakterisierungssätze

Wir kommen nun zu Charakterisierungssätzen für Linearkombinationen von Stütz- und Krümmungsmaßen; diese Aussagen stehen in Analogie zu Hadwigers bekannten „Funktionalsätzen" für Quermaßintegrale (s. Hadwiger [13], S. 221 ff.). Lokale Gegenstücke zu Hadwigers „erstem Funktionalsatz" wurden für den euklidischen Raum von Schneider [33, 34] und (in einer sehr allgemeinen Version) von Zähle [51] behandelt.

Der folgende elementare Charakterisierungssatz für Linearkombinationen der Stützmaße kann später bei der Herleitung integralgeometrischer Formeln zweckmäßig eingesetzt werden. Das wesentliche Hilfsmittel im Beweis ist die Charakterisierbarkeit des sphärischen Lebesgue-Maßes durch seine Drehinvarianz und Normierung. Im Gegensatz zu den Ergebnissen der oben genannten Autoren ist es hier nicht nötig, eine Additivitätsforderung an das betrachtete Funktional zu stellen.

Satz 4.2.1. *Es sei $\psi : \mathcal{P} \times \mathcal{B}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *$\psi(P, \cdot)$ ist für alle $P \in \mathcal{P}$ ein auf* Nor *P konzentriertes (endliches) signiertes Maß.*

(b) *Für alle $P \in \mathcal{P}$ gilt*

$$\psi(\rho P, \rho\eta) = \psi(P, \eta)$$

für jede Drehung $\rho \in SO_{n+1}$ und jedes $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$.

(c) *Sind $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ und ist $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ mit $\eta \cap \operatorname{Nor} P_1 = \eta \cap \operatorname{Nor} P_2$, so gilt*

$$\psi(P_1, \eta) = \psi(P_2, \eta).$$

Dann existieren Konstanten $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\psi(P, \cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \Theta_i(P, \cdot)$$

für alle $P \in \mathcal{P}$.

Ersetzt man in Satz 4.2.1 die Menge $\mathcal{P}$ durch $\mathcal{K}$ und fügt man noch die Forderung der schwachen Stetigkeit von ψ im ersten Argument hinzu, so bekommt man offensichtlich die entsprechende Aussage für allgemeine konvexe Körper $K \in \mathcal{K}$.

Beweis: Es sei $S \in \mathcal{S}_i$ mit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, weiter sei $B \in \mathcal{B}(S^*)$. Die Abbildung

$$\mathcal{B}(S) \to \mathbb{R}, \qquad A \mapsto \psi(S, A \times B)\,,$$

ist ein endliches signiertes Borel-Maß auf S, das wegen (b) invariant ist unter allen Drehungen, die S in sich überführen und S^* punktweise festlassen. Es folgt

$$\psi(S, A \times B) = c(S, B)\lambda^i(A) \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(S)$$

mit einer nur von S und B abhängigen reellen Konstante $c(S, B)$. Erneutes Heranziehen dieses Arguments ergibt

$$c(S, B) = c(S)\lambda^{n-i-1}(B)$$

für alle $B \in \mathcal{B}(S^*)$ mit einer nur von S abhängigen Konstanten $c(S) \in \mathbb{R}$. Wiederum aus (b) folgt, daß $c(S)$ lediglich von $i = \dim S$ abhängt; wir setzen $b_i := c(S)$. Da $\psi(S, \cdot)$ auf $S \times S^*$ konzentriert ist, folgt

$$\psi(S, A \times B) = b_i \lambda^i(A \cap S)\lambda^{n-i-1}(B \cap S^*)$$

für alle $A, B \in \mathcal{B}(S^n)$.

Nun seien $P \in \mathcal{P}$, $A, B \in \mathcal{B}(S^n)$. Es gilt

$$(A \times B) \cap \mathrm{Nor}\ P = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{F \in \mathcal{F}_i(P)} ((\mathrm{relint}\ F) \cap A) \times (N(P,F) \cap B),$$

wobei rechts eine disjunkte Vereinigung steht. Für $i \in \{0, \dots, n-1\}$ sei $F \in \mathcal{F}_i(P)$ gegeben, und $S \in \mathcal{S}_i$ sei die i-Untersphäre, die F enthält. Es gilt

$$((\mathrm{relint}\ F) \cap A) \times (N(P,F) \cap B) \subset \mathrm{Nor}\ S \cap \mathrm{Nor}\ P\,,$$

wegen (c) folgt also

$$\begin{aligned} \psi(P, ((\mathrm{relint}\ F) \cap A) \times (N(P,F) \cap B)) &= \psi(S, ((\mathrm{relint}\ F) \cap A) \times (N(P,F) \cap B)) \\ &= b_i \lambda^i(A \cap F)\lambda^{n-i-1}(N(P,F) \cap B)\,. \end{aligned}$$

Da $\psi(P, \cdot)$ auf Nor P konzentriert ist, folgt

$$\begin{aligned} \psi(P, A \times B) &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i \sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} \lambda^i(F \cap A)\lambda^{n-i-1}(N(P,F) \cap B) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \Theta_i(P, A \times B) \end{aligned}$$

mit den Konstanten $c_i := \beta_i \beta_{n-i-1} b_i$ für $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Daraus folgt in der üblichen Weise

$$\psi(P, \eta) = \sum_{i=0}^{n} c_i \Theta_i(P, \eta)$$

für alle $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$: Das System aller $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, für die diese Gleichung gilt, ist ein Dynkin-System, und es enthält die Mengen der Form $A \times B$ mit $A, B \in \mathcal{B}(S^n)$; es muß daher mit $\mathcal{B}(\Sigma)$ übereinstimmen. ■

Wir benötigen noch einen entsprechenden Charakterisierungssatz für positive Linearkombinationen der Krümmungsmaße Φ_j:

Satz 4.2.2. *Es sei $\psi : \mathcal{P} \times \mathcal{B}(S^n) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $\psi(P,\cdot)$ *ist ein auf* P *konzentriertes (endliches) Maß für alle* $P \in \mathcal{P}$.

(b) *Für alle* $P \in \mathcal{P}$ *gilt*

$$\psi(\rho P, \rho A) = \psi(P, A)$$

für alle Drehungen $\rho \in SO_{n+1}$ *und alle* $A \in \mathcal{B}(S^n)$.

(c) *Sind* $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ *und ist* $B \subset S^n$ *offen mit* $P_1 \cap B = P_2 \cap B$, *so ist*

$$\psi(P_1, A) = \psi(P_2, A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(S^n)$ *mit* $A \subset B$.

(d) *Für alle* $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ *mit* $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}$ *gilt*

$$\psi(P_1 \cap P_2, \cdot) + \psi(P_1 \cup P_2, \cdot) = \psi(P_1, \cdot) + \psi(P_2, \cdot)\,.$$

Dann existieren Konstanten $c_0, \dots, c_n \geq 0$ *mit*

$$\psi(P, \cdot) = \sum_{i=0}^{n} c_i \Phi_i(P, \cdot)$$

für alle $P \in \mathcal{P}$.

Der Beweis des analogen Satzes für den euklidischen Raum (s. Schneider [34], Theorem 6.1) läßt sich mutatis mutandis auf die Sphäre übertragen. Da wir Satz 4.2.2 jedoch in Abschnitt 5.3 wesentlich verwenden werden, führen wir den Beweis im Detail aus. Es wird folgende von Schneider ([34], Theorem 6.2) bewiesene Aussage benutzt (für verwandte Ergebnisse vgl. auch Schneider [38] und McMullen & Schneider [22], S. 226):

Hilfssatz 4.2.3. *Ist* $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ *ein nichtnegatives, drehinvariantes, additives Funktional, das für Polytope von Dimension kleiner* n *verschwindet, so ist* f *ein Vielfaches des Volumenfunktionals.*

Beweis von Satz 4.2.2*:* Wir zeigen zunächst die folgende Aussage:

($*$) Zu $i \in \{0, \dots, n-1\}$ existiert eine Konstante $b_i \geq 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $P \in \mathcal{P}$, $F \in \mathcal{F}_i(P)$ und $A \in \mathcal{B}(S^n)$ mit $A \subset \operatorname{relint} F$, so gilt

$$\psi(P, A) = b_i \lambda^{n-i-1}(N(P,F)) \lambda^i(A)\,.$$

Zum Beweis von ($*$) sei zunächst ein $S_i \in \mathcal{S}_i$ gegeben. Ist $Q \in \mathcal{P}$ ein Polytop mit $Q \subset S_i^*$, so ist das endliche Maß $\mathcal{B}(S_i) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \psi(S_i \vee Q, A)$, invariant unter Drehungen, die S_i in sich überführen und S_i^* punktweise festlassen. Es existiert daher eine Konstante $c(S_i, Q) \geq 0$, die nur von S_i und Q abhängt, mit

$$\psi(S_i \vee Q, A) = c(S_i, Q) \lambda^i(A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(S_i)$. Zur näheren Bestimmung von $c(S_i, Q)$ setzen wir $A = S_i$ und definieren durch

$$f(Q) := c(S_i, Q^* \cap S_i^*) = \frac{1}{\beta_i}\,\psi(S_i \vee (Q^* \cap S_i^*), S_i)$$

eine Funktion f auf der Menge aller Polytope Q, die in S_i^* enthalten sind. Dann ist f nichtnegativ und invariant unter Drehungen, die S_i^* in sich überführen. Sind $Q, \tilde{Q} \subset S_i^*$ Polytope mit $Q \cup \tilde{Q} \in \mathcal{P}$, so ist $Q^* \cup \tilde{Q}^* \in \mathcal{P}$, und es gilt

$$\begin{aligned} S_i \vee ((Q^* \cup \tilde{Q}^*) \cap S_i^*) &= (S_i \vee (Q^* \cap S_i^*)) \,\cup\, (S_i \vee (\tilde{Q}^* \cap S_i^*))\,, \\ S_i \vee ((Q^* \cap \tilde{Q}^*) \cap S_i^*) &= (S_i \vee (Q^* \cap S_i^*)) \,\cap\, (S_i \vee (\tilde{Q}^* \cap S_i^*))\,. \end{aligned}$$

Aus (d) folgt daher die Additivität der Abbildung f. Ist $Q \subset S_i^*$ ein Polytop mit $\dim Q < n - i - 1$, so existiert ein $S_0 \in \mathcal{S}_0$ mit $S_0 \subset S_i^* \cap Q^*$. Setzen wir $R := S_0 \vee Q \subset S_i^*$ und $S_{i+1} := S_i \vee S_0 \in \mathcal{S}_{i+1}$, so gilt, wie man leicht nachprüft,

$$S_i \vee (Q^* \cap S_i^*) = S_{i+1} \vee (R^* \cap S_{i+1}^*)$$

und daher

$$\begin{aligned} f(Q) &= \frac{1}{\beta_i}\,\psi(S_i \vee (Q^* \cap S_i^*), S_i) = \frac{1}{\beta_i}\,\psi(S_{i+1} \vee (R^* \cap S_{i+1}^*), S_i) \\ &= \frac{1}{\beta_i}\,c(S_{i+1}, R^* \cap S_{i+1}^*)\lambda^{i+1}(S_i) = 0\,. \end{aligned}$$

Die Abbildung f erfüllt daher die Voraussetzungen von Hilfssatz 4.2.3, bezogen auf die Untersphäre S_i^*, und daher ist

$$f(Q) = c(S_i^*)\lambda^{n-i-1}(Q)$$

mit einer zunächst von S_i^* abhängigen Konstante $c(S_i^*) \geq 0$. Wegen (b) hängt diese Konstante jedoch nur von der Dimension i und nicht von der speziellen Wahl der Untersphäre S_i ab; wir setzen $b_i := c(S_i^*)$. Für $Q \in \mathcal{P}$ mit $Q \subset S_i^*$ und $A \in \mathcal{B}(S_i)$ können wir also wegen $Q = (Q^* \cap S_i^*)^* \cap S_i^*$ zusammenfassend

$$\psi(S_i \vee Q, A) = b_i \lambda^{n-i-1}(Q^* \cap S_i^*)\lambda^i(A)$$

schreiben.

Nun sei $P \in \mathcal{P}$, $F \in \mathcal{F}_i(P)$ und $A \subset \operatorname{relint} F$ eine Borel-Menge. Wir setzen $S_i := S^n \cap \operatorname{lin} F$ und $Q := (S_i \vee P) \cap S_i^*$. Dann gilt $N(P, F) = P^* \cap S_i^* = Q^* \cap S_i^*$, und für eine genügend kleine offene Umgebung B von A gilt

$$P \cap B = (S_i \vee Q) \cap B\,.$$

Nach (c) gilt daher

$$\begin{aligned}\psi(P,A) &= \psi(S_i \vee Q, A)\\ &= b_i\lambda^{n-i-1}(Q^* \cap S_i^*)\lambda^i(A)\\ &= b_i\lambda^{n-i-1}(N(P,F))\lambda^i(A)\,,\end{aligned}$$

und Aussage $(*)$ ist bewiesen.

Nun sei $P \in \mathcal{P}$ und $A \in \mathcal{B}(S^n)$. Dann ist

$$A = A\backslash P \cup (A \cap \text{int } P) \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{F\in\mathcal{F}_i(P)} A \cap \text{relint } F$$

eine disjunkte Vereinigung. Mit $c_i := \beta_i\beta_{n-i-1}b_i$, $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi(P,A) &= \psi(P,A\backslash P) + \psi(P, A\cap \text{int } P)\\ &\qquad + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{F\in\mathcal{F}_i(P)} b_i\lambda^{n-i-1}(N(P,F))\lambda^i(A\cap \text{relint } F)\\ &= \psi(P,A\cap\text{int } P) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i\Phi_i(P,A)\end{aligned}$$

nach $(*)$ und Hilfssatz 3.1.2 und da $\psi(P,\cdot)$ auf P konzentriert ist. Da nach (c)

$$\psi(P, A\cap \text{int } P) = \psi(S^n, A\cap\text{int } P)$$

gilt und da $\psi(S^n,\cdot)$ nach (b) ein drehinvariantes, endliches Maß auf S^n ist, gilt für ein $b_n \geq 0$

$$\psi(P, A\cap\text{int } P) = b_n\lambda^n(A\cap \text{int } P)\,,$$

und mit $c_n := \beta_n b_n$ gilt somit $\psi(P,\cdot) = \sum_{i=0}^n c_i\Phi_i(P,\cdot)$. ■

Auch für die inneren Volumina V_j würde man die Gültigkeit eines Charakterisierungssatzes im Stil der Sätze 4.2.1 und 4.2.2 erwarten; bisher ist jedoch kein allgemeiner Beweis für eine solche Aussage gefunden worden. In diesem Zusammenhang nennen wir drei unseres Wissens nach offene Probleme, von denen die ersten beiden von McMullen gestellt worden sind (Problem 49 in Gruber & Schneider [9], siehe auch McMullen & Schneider [22], S. 229). Im folgenden steht $\mathcal{A}$ für $\mathcal{K}$ oder $\mathcal{P}$.

Problem 1: Die Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sei additiv, drehinvariant und stetig. Ist dann f eine Linearkombination der inneren Volumina $V_0,\ldots,V_n$?

Problem 1 könnte positiv beantwortet werden, wenn man in Hilfssatz 4.2.3 die Voraussetzung der Nichtnegativität durch die der Stetigkeit ersetzen könnte. Für

$n = 2$ kann die Frage bejaht werden, vgl. dazu die Bemerkungen in McMullen & Schneider [22], S. 227 und 230.

Um das zweite Problem zu formulieren, definieren wir durch $U_j := \sum_{k=0}^{[(n-j)/2]} V_{j+2k}$ die Funktionale $U_0, \ldots, U_n$ auf $\mathcal{K}$ (dabei ist $[(n-j)/2]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als $(n-j)/2$). Für die geometrische Interpretation der U_j verweisen wir auf Korollar 5.2.5.

Problem 2: Die Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sei additiv und drehinvariant, und die Einschränkung $f|(\mathcal{A}\backslash\mathcal{S})$ sei monoton wachsend bez. der Inklusion. Ist f dann eine Linearkombination der Funktionale $U_0, \ldots, U_n$ mit nichtnegativen Koeffizienten?

Durch $W_j := \sum_{k=j}^{n} V_k$ definieren wir eine dritte Serie von Funktionalen $W_0, \ldots, W_n$ auf $\mathcal{K}$. Die geometrische Bedeutung der W_j wird in Satz 5.2.11 geklärt.

Problem 3: Die Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sei additiv, drehinvariant und monoton wachsend bez. der Inklusion. Ist f dann eine Linearkombination der Funktionale $W_0, \ldots, W_n$ mit nichtnegativen Koeffizienten?

Alle drei Serien von Funktionalen U_j, V_j, W_j stehen jeweils von einem gewissen Gesichtspunkt aus in Analogie zu den euklidischen Quermaßintegralen, für U_j vgl. die Bemerkung im Anschluß an Korollar 5.2.5, für W_j die Bemerkung nach Satz 5.2.11. Könnten die genannten Fragen positiv beantwortet werden, so hätte man damit sphärische Entsprechungen zu den beiden Hadwigerschen Funktionalsätzen für euklidische Quermaßintegrale.

4.3 Die Gauß-Bonnet-Formel

Die inneren Volumina V_j genügen zwei Beziehungen, die es ermöglichen, die Euler-Charakteristik von Elementen des Konvexrings als Linearkombination ihrer inneren Volumina auszudrücken. Bei der Formulierung dieser beiden Relationen (und auch später) erweist es sich als vorteilhaft, durch

$$V_{-1}(K) := V_n(K^*)$$

ein weiteres Funktional V_{-1} auf $\mathcal{K}$ einzuführen. Es gilt nun stets $V_j(K) = V_{n-j-1}(K^*)$ für $K \in \mathcal{K}$ und $j \in \{-1, \ldots, n\}$. Das Funktional V_{-1} ist stetig.

Satz 4.3.1. *Für $K \in \mathcal{K}$ gilt*

$$\sum_{i=-1}^{n} V_i(K) = 1\,,$$

und für $K \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$ gilt

$$\sum_{i=-1}^{n} (-1)^i V_i(K) = 0\,.$$

Im Beweis der zweiten der beiden Beziehungen von Satz 4.3.1 wird der nachfolgende Hilfssatz verwendet. Wir benutzen die folgende Notation: Ist $P \in \mathcal{P}$, so definieren wir zu $F \in \mathcal{F}(P)$

$$\hat{F} := \{x \in P^* : \langle x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in F\}\,.$$

Für $F \in \mathcal{F}(P)\backslash\{\emptyset\}$ gilt dann $\hat{F} = N(P, F)$, und für $F = \emptyset$ gilt $\hat{F} = P^*$. Die Abbildung $\mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P^*)$, $F \mapsto \hat{F}$, ist bijektiv, falls $\dim P = \dim P^* = n$ ist.

Hilfssatz 4.3.2. *Für alle $P \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{S}$ verschwindet die durch*

$$\alpha(x) := \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} (-1)^{\dim F}\ \mathbf{1}_{F\vee(-\hat{F})}(x)$$

definierte Funktion $\alpha : S^n \to \mathbb{R}$ fast überall in bezug auf λ^n.

Wir vermuten, daß die Funktion α für eigentlich konvexe $P \in \mathcal{P}\backslash\{\emptyset\}$ sogar identisch verschwindet. In McMullen [20], S. 249, wurde eine ähnliche Aussage ohne Beweis angegeben. Wüßte man, daß α für solche P identisch verschwindet, so könnte man daraus leicht die Euler-Formel für sphärische Polytope ableiten. Falls die vermutete Aussage zutrifft, ist sie daher wohl aufwendiger oder unter Verwendung der Euler-Formel zu zeigen; für den Beweis von Satz 4.3.1 ist jedenfalls Hilfssatz 4.3.2 ausreichend. Der nun folgende Beweis von Hilfssatz 4.3.2 verdankt eine Anregung durch eine Skizze von McMullen [21].

Beweis von Hilfssatz 4.3.2*:* Wir nehmen zunächst an, daß $P \in \mathcal{P}$ eigentlich konvex und n-dimensional ist. Wir setzen

$$\mathcal{A} := \{F \vee (-\hat{F}) \in \mathcal{P} : F \in \mathcal{F}(P)\}\,.$$

Da $\dim P = \dim P^* = n$ ist, gilt $\dim Q = n$ für alle $Q \in \mathcal{A}$. Weiter definieren wir

$$X := S^n \Big\backslash \bigcup_{Q\in\mathcal{A}} \ \bigcup_{F\in\mathcal{F}_{n-2}(Q)} F\,.$$

Dann ist X offen, und es gilt $\lambda^n(S^n\backslash X) = 0$. Wir zeigen $\alpha(x) = 0$ für alle $x \in X$.

Die Menge $S^n\backslash(P \vee (-P^*))$ ist nicht leer. Es sei y ein Element dieser Menge. Es gilt $y \notin Q$ für alle $Q \in \mathcal{A}$, daher ist $y \in X$ und $\alpha(y) = 0$. Es sei $x \in X$ beliebig. Die Menge X ist wegzusammenhängend, wir können daher einen Weg $\gamma : [0, 1] \to X$

wählen mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Wir zeigen, daß für jede Facette H eines Polytops $Q \in \mathcal{A}$ und jedes $s \in [0,1]$ mit $\gamma(s) \in H$

$$\lim_{t \to s} \alpha \circ \gamma(t) = \alpha \circ \gamma(s) \tag{4.3}$$

gilt. Ist dies gezeigt, so ist $\alpha \circ \gamma$ konstant und daher $\alpha(x) = 0$, wie behauptet.

Sei also H eine Facette eines Polytops $Q \in \mathcal{A}$. Wir setzen

$$\mathcal{B} := \{F \in \mathcal{F}(P) : H \in \mathcal{F}_{n-1}(F \vee (-\hat{F}))\}$$

und

$$\mathcal{C} := \{(F_1, F_2) \in \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) : F_1 \in \mathcal{F}(F_2),\ H = F_1 \vee (-\hat{F}_2)\}\,.$$

Wir zeigen nun:

(a) Für alle $(F_1, F_2) \in \mathcal{C}$ gilt $\dim F_1 = \dim F_2 - 1$, und die äußeren Normalenvektoren der Polytope $F_1 \vee (-\hat{F}_1)$, $F_2 \vee (-\hat{F}_2)$ bei ihrer gemeinsamen Facette H stimmen überein.

(b) Es gilt

$$\mathcal{B} = \bigcup_{(F_1,F_2)\in\mathcal{C}} \{F_1, F_2\}\,,$$

und die rechtsstehende Vereinigung ist disjunkt.

Sind (a) und (b) gezeigt, so folgt die Beziehung (4.3) für jedes $s \in [0,1]$ mit $\gamma(s) \in H$, und die Behauptung ist bewiesen.

Zu (a): Es sei $(F_1, F_2) \in \mathcal{C}$. Wäre $F_2 = \emptyset$, so wäre $\dim \hat{F}_2 = n$ und damit $\dim H = n$. Es gilt also $\dim F_2 \in \{0, \dots, n\}$. Wäre $\dim F_1 \geq \dim F_2$, so wäre $F_1 = F_2$ wegen $F_1 \in \mathcal{F}(F_2)$ und daher $\dim H = \dim F_1 \vee (-\hat{F}_1) = n$. Es gilt also $\dim F_1 \leq \dim F_2 - 1$. Wegen $n - 1 = \dim F_1 \vee (-\hat{F}_2) \leq \dim F_1 + \dim \hat{F}_2 + 1 = \dim F_1 + n - \dim F_2$ folgt $\dim F_1 = \dim F_2 - 1$. Es sei u der äußere Normalenvektor des Polytops $F_2 \vee (-\hat{F}_2)$ bei seiner Facette H, und v sei der äußere Normalenvektor von $F_1 \vee (-\hat{F}_1)$ bei H. Ist $\dim F_2 = n$, so gilt $F_2 = P$ und $F_1 = H$. Daher gilt $-\hat{F}_1 = \{-u\}$ und damit $u = v$. Im Fall $\dim F_2 = 0$ kann man analog argumentieren. Für $j \in \{1, \dots, n-1\}$ haben wir zu Beginn des Beweises von Hilfssatz 3.2.4 die folgende Aussage gezeigt: Ist $F \in \mathcal{F}_j(P)$ und $V \in \mathcal{F}_{j-1}(F)$, und ist $u_{F,V}$ der äußere Normalenvektor der Seite F bei ihrer Facette V (vgl. die Erläuterung im Beweis von Hilfssatz 3.2.4), so gilt für den äußeren Normalenvektor $u_{G,W}$ von $G := N(P,V) \in \mathcal{F}_{n-j}(P^*)$ bei $W := N(P,F) \in \mathcal{F}_{n-j-1}(G)$ die Beziehung $u_{F,V} = -u_{G,W}$. Ist nun $\dim F_2 \in \{1, \dots, n-1\}$ und setzen wir $F := F_2$, $V := F_1$, $G := \hat{F}_1$ und $W := \hat{F}_2$, so gilt offenbar $u = u_{F,V}$ und $v = -u_{G,W}$. Wir erhalten also auch in diesem Fall $u = v$.

Zu (b): Zu $F \in \mathcal{B}$ gibt es ein Paar $(G,J) \in \mathcal{F}(F) \times \mathcal{F}(-\hat{F})$ mit $H = G \vee J$. Wegen $\dim G + \dim J = n - 2$ und $\dim F + \dim(-\hat{F}) = n - 1$ gilt $G = F$ oder $J = -\hat{F}$. Das

Paar (G, J) ist eindeutig bestimmt. Durch $F_1 := G$ und $F_2 \in \mathcal{F}(P)$ mit $-\hat{F}_2 = J$ ist daher das eindeutig bestimmte Paar $(F_1, F_2) \in \mathcal{C}$ gegeben mit $F \in \{F_1, F_2\}$. Ist umgekehrt $F \in \{F_1, F_2\}$ mit $(F_1, F_2) \in \mathcal{C}$, so gilt nach Definition von $\mathcal{C}$ stets $H \in \mathcal{F}_{n-1}(F \vee (-\hat{F}))$ und damit $F \in \mathcal{B}$. Es ist also $\mathcal{B}$ gleich der angegebenen Vereinigung, und diese ist disjunkt.

Damit ist der Hilfssatz unter der Annahme gezeigt, daß P eigentlich konvex und von Dimension n ist.

Nun sei $P \in \mathcal{P}\backslash\{\emptyset\}$ eigentlich konvex, aber nicht notwendig mit inneren Punkten. Es sei S die Untersphäre der Dimension $j := \dim P$, die P enthält. Nach dem oben Gezeigten gilt

$$\sum_{F\in\mathcal{F}(P)} (-1)^{\dim F}\, \mathbf{1}_{F\vee(-\hat{F}\cap S)}(x) = 0$$

für alle Elemente x einer Menge $B \in \mathcal{B}(S)$ mit $\lambda^j(S\backslash B) = 0$. Für alle $x \in S^n\backslash S^*$ mit $p(S, x) \in B$ gilt dann

$$\sum_{F\in\mathcal{F}(P)} (-1)^{\dim F}\, \mathbf{1}_{F\vee(-\hat{F})}(x) = 0\,,$$

und für $C := \{x \in S^n\backslash S^* : p(S, x) \in B\}$ gilt $C \in \mathcal{B}(S^n)$ und $\lambda^n(S^n\backslash C) = 0$.

Nun sei $P \in \mathcal{P}\backslash\{S^n\}$ mit $\dim P = n$ und $\dim P^* < n$. Dann ist $P^* \in \mathcal{P}\backslash\{\emptyset\}$ eigentlich konvex, daher gilt

$$\sum_{G\in\mathcal{F}(P^*)} (-1)^{\dim G}\mathbf{1}_{G\vee(-\hat{G})}(x) = 0$$

für λ^n-fast alle $x \in S^n$. Die Abbildung $\mathcal{F}(P)\backslash\{\emptyset\} \to \mathcal{F}(P^*)$, $F \mapsto \hat{F}$, ist bijektiv, daher gilt

$$\sum_{F\in\mathcal{F}(P)} (-1)^{\dim F}\mathbf{1}_{F\vee(-\hat{F})}(x) = (-1)^{n-1} \sum_{G\in\mathcal{F}(P^*)} (-1)^{\dim G}\mathbf{1}_{G\vee(-\hat{G})}(-x) - \mathbf{1}_{P^*}(-x) = 0$$

für λ^n-fast alle $x \in S^n$. Die Behauptung gilt daher für alle $P \in \mathcal{P}\backslash\{S^n\}$ mit inneren Punkten. Wie oben kann man nun die Gültigkeit der Aussage auch auf alle $P \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{S}$ ausdehnen. ■

Beweis von Satz 4.3.1*:* Aus der Steiner-Formel (3.1) folgt

$$1 - V_n(K) - V_n(K^*) = \sum_{i=0}^{n-1} V_i(K)$$

wegen $\int_0^{\pi/2} \cos^i t \sin^{n-i-1} t\, dt = \beta_n/(\beta_i\beta_{n-i-1})$ und $\mu_\epsilon(K, \Sigma) \to \beta_n(1 - V_n(K) - V_n(K^*))$ für $\epsilon \to \pi/2$; somit gilt die erste der behaupteten Formeln.

Da $\mathcal{P}\backslash\mathcal{S}$ dicht liegt in $\mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$ und die Funktionale V_j stetig sind, können wir zum Beweis der zweiten Gleichung $K = P \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{S}$ annehmen. Ist $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, so folgt aus der Invarianz des sphärischen Lebesgue-Maßes unter (eigentlichen und uneigentlichen) Drehungen und Gleichung (3.2)

$$\begin{aligned}
\sum_{F\in\mathcal{F}_i(P)} \lambda^n(F\vee(-\hat{F})) &= \sum_{F\in\mathcal{F}_i(P)} \lambda^n(F\vee\hat{F}) = \sum_{F\in\mathcal{F}_i(P)} \lambda^n(F\vee N(P,F)) \\
&= \sum_{F\in\mathcal{F}_i(P)} \int\limits_F \int\limits_{N(P,F)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \, dt d\lambda^{n-i-1} d\lambda^i \\
&= \frac{\beta_n}{\beta_i\beta_{n-i-1}} \sum_{F\in\mathcal{F}_i(P)} \lambda^i(F)\lambda^{n-i-1}(N(P,F)) \\
&= \beta_n V_i(P)\,,
\end{aligned}$$

wobei zum Schluß die aus Hilfssatz 3.1.2 folgende explizite Darstellung der inneren Volumina für den Fall von Polytopen verwendet wurde. Für die durch $\alpha(x) := \sum_{F\in\mathcal{F}(P)}(-1)^{\dim F}\mathbf{1}_{F\vee(-\hat{F})}(x)$ definierte Funktion $\alpha : S^n \to \mathbb{R}$ gilt daher

$$\int\limits_{S^n} \alpha\, d\lambda^n = \beta_n\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i V_i(P) - V_n(P^*) + (-1)^n V_n(P)\Big)\,.$$

Anwenden von Hilfssatz 4.3.2 ergibt $\int_{S^n} \alpha\, d\lambda^n = 0$ und somit $\sum_{i=-1}^{n}(-1)^i V_i(P) = 0$, was zu zeigen war. ■

Bemerkung: Ist $f : S^n \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, meßbare Funktion, so gilt nach Hilfssatz 3.2.5 für alle $K \in \mathcal{K}$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S^n} f\, d\lambda^n &= \beta_n\Big(\int\limits_{S^n} f\, d\Phi_n(K,\cdot) + \int\limits_{S^n} f\, d\Phi_n(K^*,\cdot)\Big) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\beta_{n-i-1} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \int\limits_\Sigma f(x\cos t + u \sin t)\, d\Theta_i(K,(x,u))\, dt\,,
\end{aligned}$$

die man offenbar als lokalisierte Version der ersten der beiden Beziehungen aus Satz 4.3.1 auffassen kann. Die entsprechende Version der zweiten Beziehung lautet

$$\begin{aligned}
&\beta_n\Big(\int\limits_{S^n} f\, d\Phi_n(-K^*,\cdot) + (-1)^{n+1}\int\limits_{S^n} f\, d\Phi_n(K,\cdot)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \beta_i\beta_{n-i-1} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \int\limits_\Sigma f(x\cos t - u\sin t)\, d\Theta_i(K,(x,u))\, dt
\end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$. Diese Gleichung kann man analog zeigen, wenn man beachtet, daß nach Hilfssatz 4.3.2 für alle $P \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{S}$ die Funktion $S^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{F\in\mathcal{F}(P)}(-1)^{\dim F} f(x)\mathbf{1}_{F\vee(-\hat{F})}(x)$, für λ^n-fast alle $x \in S^n$ verschwindet. Wegen $\Theta_i(K,\eta) = \Theta_i(-K,-\eta)$ mit $-\eta := \{(-x,-u) \in \Sigma : (x,u) \in \eta\}$ für $K \in \mathcal{K}$, $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, $i \in \{0,\dots,n-1\}$, zeigt eine Anwendung des Transformationssatzes für Integrale

$$\begin{aligned}
\int_{S^n} f\,d\lambda^n &= \beta_n\Big(\int_{S^n} f\,d\Phi_n(K,\cdot) + (-1)^n \int_{S^n} f\,d\Phi_n(-K,\cdot)\Big)\\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\beta_{n-i-1}\Big(\int_0^{\pi/2}\cos^i t\sin^{n-i-1} t\int_\Sigma f(x\cos t + u\sin t)\,d\Theta_i(K,(x,u))dt\\
&\quad + (-1)^i\int_0^{\pi/2}\cos^i t\sin^{n-i-1} t\int_\Sigma f(x\cos t - u\sin t)\,d\Theta_i(-K,(x,u))dt\Big)\\
&= \beta_n\Big(\int_{S^n} f\,d\Phi_n(K,\cdot) + (-1)^n \int_{S^n} f\,d\Phi_n(-K,\cdot)\Big)\\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\beta_{n-i-1}\int_0^{\pi}\cos^i t\sin^{n-i-1} t\int_\Sigma f(x\cos t + u\sin t)\,d\Theta_i(K,(x,u))dt
\end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$ (man beachte die Integrationsgrenzen der äußeren Integrale). Diese letzte Gleichung kann als lokale Version eines Spezialfalls der nachfolgenden Gauß-Bonnet-Formel aufgefaßt werden.

Korollar 4.3.3. (Gauß-Bonnet-Formel) *Für $K \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\chi(K) = 2\sum_{i=0}^{[n/2]} V_{2i}(K)\,.$$

Beweis: Addiert man die Gleichungen aus Satz 4.3.1, so erhält man

$$2\sum_{i=0}^{[n/2]} V_{2i}(K) = \begin{cases} 1 & \text{für } K \in \mathcal{K}_0\backslash\{\emptyset\}\\ 0 & \text{für } K = \emptyset\,,\end{cases}$$

also die behauptete Gleichung für $K \in \mathcal{K}_0$. Da alle beteiligten Funktionale additive Fortsetzungen auf den Konvexring erlauben, gilt die Beziehung auch für $K \in \mathcal{R}$. ∎

Bemerkung 1: Nach Korollar 4.3.3 und Satz 4.3.1 gilt also für alle $K \in \mathcal{K}$

$$\chi(K) = 2\sum_{i=0}^{[n/2]} V_{2i}(K) = \begin{cases} 1 & \text{für } K \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{S}\\ 1 + (-1)^{\dim K} & \text{für } K \in \mathcal{S}\,.\end{cases}$$

Bemerkung 2: Eine Version von Korollar 4.3.3 für Parallelbereiche konvexer Körper kann man wie folgt ableiten.

Bezeichnet B_t eine sphärische Kugel mit Radius t, $0 \leq t \leq \pi/2$, so gilt für $0 < \epsilon < \pi/2$ und $0 \leq r \leq \pi/2 - \epsilon$ nach den Sätzen 3.1.5, 3.1.1 und Korollar 4.3.3

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{[n/2]} V_{2i}(B_{r+\epsilon}) &= \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj(2i)}(\epsilon) V_j(B_r) \left[+ V_n(B_{r+\epsilon}) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \alpha_{ni(2j)}(\epsilon) \Big) V_i(B_r) \\
&\qquad \left[+ V_n(B_r) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta_i \beta_{n-i-1}}{\beta_n} \int_0^{\epsilon} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \, dt \; V_i(B_r) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} V_{2k}(B_r) \, .
\end{aligned}$$

(Die Terme in eckigen Klammern sind hier und im folgenden zu streichen, wenn n ungerade ist.) Die durch Gleichung (4.2) gegebenen Funktionen $r \mapsto V_i(B_r)$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, sind linear unabhängig; es ist daher ein Koeffizientenvergleich möglich, und wir erhalten

$$\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \alpha_{ni(2j)}(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ und } i \text{ ungerade sind,} \\ 1, & \text{falls } n \text{ ungerade, } i \text{ gerade ist,} \\ -\frac{\beta_i \beta_{n-i-1}}{\beta_n} \int_0^{\epsilon} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \, dt, & \text{falls } n \text{ gerade, } i \text{ ungerade ist,} \\ 1 - \frac{\beta_i \beta_{n-i-1}}{\beta_n} \int_0^{\epsilon} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \, dt, & \text{falls } n \text{ und } i \text{ gerade sind.} \end{cases}$$

Daher ist für beliebiges $K \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{[n/2]} V_{2i}(K_\epsilon) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \alpha_{ni(2j)}(\epsilon) V_i(K) \\
&\qquad \left[+ V_n(K) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta_i \beta_{n-i-1}}{\beta_n} \int_0^{\epsilon} \cos^i t \sin^{n-i-1} t \, dt \; V_i(K) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{[n/2]} V_{2i}(K)
\end{aligned}$$

und daher

$$2 \sum_{i=0}^{[n/2]} V_{2i}(K_\epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{für } K \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{S} \\ 1 + (-1)^{\dim K} & \text{für } K \in \mathcal{S} \end{cases}$$

für alle ϵ mit $0 \leq \epsilon < \pi/2$.

Wir geben einige Literaturhinweise zu den in diesem Abschnitt behandelten Formeln. Ein weitreichendes Analogon von Korollar 4.3.3 für polyedrische Mannigfaltigkeiten geht auf Allendoerfer & Weil [2] zurück. Weitere Entsprechungen für Untermannigfaltigkeiten bzw. polyedrische Mengen im sphärischen und hyperbolischen Raum haben Herglotz [14] und Santaló [28] behandelt. Alternative Beweise für die beiden Formeln aus Satz 4.3.1 findet man in der Arbeit von McMullen [20]. In den Beweis der zweiten Formel (Theorem 2 in [20]) gehen bei McMullen die Euler-Formel und die Sommerville-Gleichung für polyedrische konvexe Kegel ein. Es findet sich in [20] auch eine (sehr knappe) Skizze für einen direkteren Beweis; diese Skizze haben wir zu dem oben gegebenen Beweis ausgebaut.

4.4 Geometrische Interpretation in Spezialfällen

In einigen Fällen sind direkte geometrische Interpretationen der Stütz- und Krümmungsmaße möglich, so für den Fall von Polytopen, für glatt berandete konvexe Körper und bei allgemeinen konvexen Körpern K für die Maße $\Theta_0(K,\cdot)$, $\Theta_{n-1}(K,\cdot)$. Wir werden von diesen speziellen Darstellungen im weiteren Verlauf der Arbeit keinen Gebrauch machen (außer natürlich – wie schon geschehen – von der Darstellung im Fall von Polytopen), wollen in diesem Abschnitt aber dennoch kurz auf sie eingehen, um die geometrische Bedeutung der Stützmaße noch weiter zu klären. Der Vollständigkeit halber nennen wir hier noch einmal das Ergebnis aus Hilfssatz 3.1.2 über Stützmaße von Polytopen.

Satz 4.4.1. *Für Polytope $P \in \mathcal{P}$ und $j \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt*

$$\Theta_j(P,\eta) = \frac{1}{\beta_j \beta_{n-j-1}} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(P)} \int_F \lambda^{n-j-1}(N(P,F) \cap \eta_x)\, d\lambda^j(x)$$

für alle $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, wobei $\eta_x := \{u \in S^n : (x,u) \in \eta\}$ ist.

Um die erwähnten Darstellungen für glatte konvexe Körper und für $j \in \{0, n-1\}$ zu erhalten, kann man im Prinzip vorgehen wie im euklidischen Fall (s. Schneider [39], Abschnitt 4.2). Es ist aber auch möglich, sich direkt auf die betreffenden Eigenschaften der (verallgemeinerten) Krümmungsmaße euklidisch konvexer Körper zu berufen und diese dann auf den sphärischen Fall zu übertragen: Bezeichnet nämlich $\Theta_j^e(M,\cdot)$ das auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1} \times S^n)$ definierte j-te verallgemeinerte Krümmungsmaß des euklidisch konvexen Körpers $M \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ ([39], Theorem 4.2.1) und setzt man

$$\tilde{\eta} := \{(\lambda x, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times S^n : 0 < \lambda < 1, (x,u) \in \eta\}$$

für $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, so stimmt $\Theta_j(K,\eta)$ für alle $K \in \mathcal{K}$, $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ und $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ bis auf einen Faktor mit $\Theta^e_{j+1}(\overline{K},\tilde{\eta})$ überein. Man kann dies in einfacher Weise zuerst für $K \in \mathcal{P}$ beweisen und das Resultat dann durch Approximation ausdehnen. Wir wollen uns aus diesen Gründen damit begnügen, die beiden folgenden Sätze ohne Beweis anzugeben.

Die nun zu beschreibende Darstellung der Krümmungsmaße glatt berandeter sphärisch konvexer Körper ist natürlich der Grund für die Wahl der Bezeichnung „Krümmungsmaß".

Satz 4.4.2. *Ist $K \in \mathcal{K}$ mit* $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ *derart, daß* $\operatorname{bd} K$ *eine Hyperfläche in S^n der Klasse C^2 ist, so gilt für $j \in \{0,\ldots,n-1\}$*

$$\Phi_j(K,A) = \frac{1}{\beta_j \beta_{n-j-1}} \int\limits_{A \cap bd\ K} H_{n-j-1}\, d\lambda^{n-1}$$

für alle $A \in \mathcal{B}(S^n)$, wobei H_{n-j-1} die $(n-j-1)$-te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen von $\operatorname{bd} K$ *in S^n ist.*

Für eine Entsprechung des nächsten Satzes im euklidischen Raum sehe man Schneider [36], S. 120 f. Es bezeichne $\pi_1 : \Sigma \to S^n$ die Projektion auf den ersten Faktor.

Satz 4.4.3. *Für $K \in \mathcal{K}$ mit* $\dim K \neq n-1$ *gilt*

$$\Theta_{n-1}(K,\eta) = \Theta_0(K^*,\eta^{-1}) = \frac{1}{2\beta_{n-1}}\, \lambda^{n-1}(\pi_1(\eta \cap \operatorname{Nor} K))\,,$$

und für $K \in \mathcal{K}$ mit $\dim K = n-1$ *gilt*

$$\Theta_{n-1}(K,\eta) = \Theta_0(K^*,\eta^{-1}) = \frac{1}{2\beta_{n-1}} \sum_{i=1}^{2} \lambda^{n-1}(\pi_1(\eta \cap (K \times \{u_i\})))$$

jeweils für alle $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, wobei zuletzt u_1, u_2 die beiden zu $\operatorname{lin} K$ *orthogonalen Einheitsvektoren sind.*

Auf Interpretationen der Stützmaße, die mit Hilfe integralgeometrischer Formeln möglich sind, weisen wir erst hin, wenn diese Formeln zur Verfügung stehen. Dies geschieht jeweils im Anschluß an Satz 6.1.1 und Korollar 7.3.

5 Kinematische Formeln für Krümmungsmaße

Nachdem in den letzten beiden Kapiteln die Stützmaße Θ_j und als Spezialisierungen die Krümmungsmaße Φ_j und die inneren Volumina V_j eingeführt und auf ihre Eigenschaften hin untersucht worden sind, sollen nun integralgeometrische Formeln hergeleitet werden, die mit den eben genannten Maßen und Funktionalen in Zusammenhang stehen. Wir erläutern das zugrundeliegende Prinzip solcher Formeln durch die folgende Problemstellung: Es sei ein geometrisch definiertes Funktional F auf $\mathcal{K}$ gegeben. Wir betrachten zwei konvexe Körper K und K' und bilden für eine beliebige Drehung $\rho \in SO_{n+1}$ aus den Körpern K und $\rho K'$ einen dritten konvexen Körper $K * \rho K'$. Die Aufgabenstellung besteht nun darin, den Mittelwert von $F(K * \rho K')$ über alle Drehungen ρ bezüglich des invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes auf SO_{n+1} zu berechnen und das Ergebnis durch geometrische Kenngrößen von K und K' auszudrücken. Das Bilden der Schnittmenge, der sphärisch konvexen Hülle der Vereinigungsmenge und der Projektion (falls K' eine Untersphäre ist) liefern Beispiele für Verknüpfungen $*$, die im weiteren Verlauf untersucht werden. Analoge Probleme können auch für „lokalisierte“ Funktionale untersucht werden, und auch nicht konvexe Mengen können oft in die Betrachtung einbezogen werden.

Ein Beispiel einer solchen integralgeometrischen Formel ist die kinematische Hauptformel in einer Version für Krümmungsmaße und Mengen des Konvexrings; dieses Resultat wird in Abschnitt 5.1 bewiesen. Mit meist einfachen Mitteln leiten wir dann in Abschnitt 5.2 eine Reihe weiterer Ergebnisse ab. In Abschnitt 5.3 gehen wir auf eine „abstrakte“ Version der lokalen kinematischen Hauptformel ein, in der im Integrand das Krümmungsmaß ersetzt wird durch ein allgemeineres Funktional.

5.1 Die kinematische Hauptformel für Krümmungsmaße

Das Hauptergebnis von Kapitel 5 ist die folgende Aussage:

Satz 5.1.1. (Kinematische Hauptformel) *Sind $K, K' \in \mathcal{R}$ Mengen des Konvexrings und sind $A, B \in \mathcal{B}(S^n)$, so gilt*

$$\int_{SO_{n+1}} \Phi_j(K \cap \rho K', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j}^{n} \Phi_k(K, A)\Phi_{n+j-k}(K', B) \tag{5.1}$$

für $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Dem Beweis von Satz 5.1.1 stellen wir vier Hilfssätze voran, die sich leicht aus Bekanntem ergeben. Dazu zunächst einige terminologische Festlegungen: Sind

$K, K' \in \mathcal{K}$, so *trennt* die $(n-1)$-Sphäre H die Körper K und K', wenn für einen Normalenvektor u von H die Inklusionen $K \subset \{u\} \vee H$ und $K' \subset \{-u\} \vee H$ gelten; die Körper K und K' *berühren sich*, wenn $K \cap K' \neq \emptyset$ gilt und eine $(n-1)$-Sphäre existiert, die K und K' trennt. Wir setzen

$$SO_{n+1}(K, K') := \{\rho \in SO_{n+1} : K \text{ und } \rho K' \text{ berühren sich}\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $SO_{n+1}(K, K')$ abgeschlossen, insbesondere also eine Borel-Menge ist.

Hilfssatz 5.1.2. *Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ konvexe Körper, die sich nicht berühren, und es sei $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{K}$ mit $\lim_{i\to\infty} K_i = K$. Dann gilt $\lim_{i\to\infty}(K_i \cap K') = K \cap K'$.*

Beweis: Ist $K \cap K' = \emptyset$, so gilt $K_i \cap K' = \emptyset$ für fast alle i und damit $\lim_{i\to\infty}(K_i \cap K') = K \cap K' = \emptyset$. Ist $K \cap K' \neq \emptyset$, so sind die Körper $\overline{K}, \overline{K'} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ nicht durch eine Hyperebene trennbar. Aus Theorem 1.8.8 in Schneider [39] folgt daher

$$\lim_{i\to\infty} \overline{K_i \cap K'} = \lim_{i\to\infty} (\overline{K_i} \cap \overline{K'}) = \overline{K} \cap \overline{K'} = \overline{K \cap K'}.$$

Nach Hilfssatz 2.3 gilt deshalb $\lim_{i\to\infty}(K_i \cap K') = K \cap K'$. ■

Hilfssatz 5.1.3. *Sind $S, S' \in \mathcal{S}$ Untersphären, so gilt für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$*

$$S \cap \rho S' \in \mathcal{S}_k,$$

wobei $k := \max\{-1, \dim S + \dim S' - n\}$ ist.

Beweis: Ist $S = S^n$ oder $S' = S^n$, so ist die Aussage trivial. Seien daher $S, S' \neq S^n$. Wir setzen $L := \text{lin } S$, $L' := \text{lin } S'$. Ist $S \cap \rho S' \notin \mathcal{S}_k$, so gilt

$$L \cap \rho L' \neq \{o\} \quad \text{und} \quad \text{lin } (L \cup \rho L') \neq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Aus Lemma 4.5.1 in Schneider [39] folgt daher die Behauptung. ■

Hilfssatz 5.1.4. *Sind $P, P' \in \mathcal{P}$ Polytope, so gilt $\nu(SO_{n+1}(P, P')) = 0$.*

Beweis: Es sei $\rho \in SO_{n+1}(P, P')$, und es sei H eine $(n-1)$-Sphäre, die P und $\rho P'$ trennt. Es gilt $P \cap H \in \mathcal{F}(P)$ und $P' \cap \rho^{-1}H \in \mathcal{F}(P')$. Wir setzen $S := S^n \cap \text{lin } (P \cap H)$, $S' := S^n \cap \text{lin } (P' \cap \rho^{-1}H)$. Es gilt $S, \rho S' \subset H$ und $\dim(S \cap \rho S') \geq 0$. Eine Unterscheidung der Fälle $\dim S + \dim S' \leq n-1$ und $\dim S + \dim S' \geq n$ zeigt $\dim(S \cap \rho S') > \max\{-1, \dim S + \dim S' - n\}$ und deshalb

$$\rho \in \bigcup_{i,j=0}^{n-1} \bigcup_{\substack{F\in\mathcal{F}_i(P)\\ F'\in\mathcal{F}_j(P')}} \{\vartheta \in SO_{n+1} : \dim(S^n \cap (\text{lin } F \cap \text{lin } \vartheta F')) > \max\{-1, i+j-n\}\}.$$

Aus Hilfssatz 5.1.3 folgt nun die Behauptung. ■

Hilfssatz 5.1.5. *Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ derart, daß K und K' sich nicht berühren; ferner sei $K \notin \mathcal{S}$. Dann gilt $K \cap K' \notin \mathcal{S}$ oder $K \cap K' = \emptyset$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst die folgende Aussage, auf die wir später noch einmal zurückkommen werden: Ist $K \cap K' \neq \emptyset$ für konvexe Körper $K, K' \in \mathcal{K}$ und gilt relint $K \cap$ relint $K' = \emptyset$, so berühren sich K und K'. In diesem Fall ist nämlich einer der Körper keine Untersphäre, die beiden Kegel pos K, pos K' haben daher keine relativ inneren Punkte gemeinsam. Nach Theorem 1.3.8 in Schneider [39] existiert deshalb eine Hyperebene in $\mathbb{R}^{n+1}$, so daß die beiden Kegel in verschiedenen von ihr begrenzten abgeschlossenen Halbräumen liegen. Ist S der Schnitt dieser Hyperebene mit S^n, so gilt $S \in \mathcal{S}_{n-1}$ wegen $o \in \text{pos}\, K \cap \text{pos}\, K'$, und die Körper K, K' werden von S getrennt.

Nun seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 5.1.5 gegeben, und es sei $K \cap K' \neq \emptyset$. Aus der vorangegangenen Überlegung folgt relint $K \cap$ relint $K' \neq \emptyset$, es gibt also ein $x \in (\text{relint}\, K) \cap K'$. Nehmen wir $-x \in K$ an, so existiert zu jedem $y \in K \backslash \{x, -x\}$ ein $z \in K \backslash \{-y\}$ mit $x \in \text{relint}\, [y, z]$ und damit $-y \in [z, -x] \subset K$. Es gilt also $K = -K$ und daher $K \in \mathcal{S}$. Dieser Widerspruch zeigt $-x \notin K$ und damit $-x \notin K \cap K'$. Es gilt also $K \cap K' \notin \mathcal{S}$. ∎

Beweis von Satz 5.1.1*:* Wir zeigen Gleichung (5.1) zuerst für Polytope $P, P' \in \mathcal{P}$. Um die Meßbarkeit des Integranden zu zeigen, verwenden wir das in Schneider & Weil [42], S. 61 f., ausgeführte Argument. Für beliebiges $\rho \in SO_{n+1}$ sei die Abbildung $T_\rho : S^n \to S^n \times S^n$ gegeben durch $T_\rho(x) := (x, \rho^{-1}x)$. Das Bildmaß

$$\varphi^{(j)}(\rho, P, P', \cdot) := T_\rho(\Phi_j(P \cap \rho P', \cdot))$$

von $\Phi_j(P \cap \rho P', \cdot)$ unter der (stetigen) Abbildung T_ρ ist ein endliches Borel-Maß auf $S^n \times S^n$. Unter Verwendung von Hilfssatz 5.1.2, der Stetigkeit der Abbildung $\rho \mapsto \rho P'$ und der Stetigkeit des Krümmungsmaßes Φ_j sieht man wie in [42], S. 62, daß für alle stetigen Funktionen $f : S^n \times S^n \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$SO_{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad \rho \mapsto \int\limits_{S^n \times S^n} f \, d\varphi^{(j)}(\rho, P, P', \cdot)\,,$$

stetig ist auf der Menge $SO_{n+1} \backslash SO_{n+1}(P, P')$. Aus Hilfssatz 7.2.2 in [42] folgt nun, daß die Abbildung

$$\rho \mapsto \varphi^{(j)}(\rho, P, P', A \times B) = \Phi_j(P \cap \rho P', A \cap \rho B)$$

auf $SO_{n+1} \backslash SO_{n+1}(P, P')$ meßbar ist für alle $A, B \in \mathcal{B}(S^n)$. Da $SO_{n+1}(P, P')$ nach Hilfssatz 5.1.4 eine ν-Nullmenge ist, ist das fragliche Integral für den Fall von Polytopen erklärt.

Für beliebiges $P' \in \mathcal{P}$ und offenes $B \subset S^n$ definieren wir nun $\psi : \mathcal{P} \times \mathcal{B}(S^n) \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(P, A) := \int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(P \cap \rho P', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho)\,.$$

Die Abbildung ψ erfüllt die Voraussetzungen des Charakterisierungssatzes 4.2.2: Wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz ist $\psi(P, \cdot)$ ein auf P konzentriertes (endliches) Borel-Maß, aus der Additivität von Φ_j folgert man die Additivität von ψ, aus der Drehkovarianz von Φ_j und der Linksinvarianz von ν folgt die Drehkovarianz von ψ, und auch die Eigenschaft von ψ, lokal erklärt zu sein, sieht man leicht ein: Ist $A \subset S^n$ offen und sind $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mit $P_1 \cap A = P_2 \cap A$, so gilt für alle $A' \in \mathcal{B}(S^n)$ mit $A' \subset A$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\psi(P_1, A') &= \int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(P_1 \cap \rho P', A' \cap \rho B)\, d\nu(\rho) \\
&= \int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(P_2 \cap \rho P', A' \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \psi(P_2, A')\,,
\end{aligned}$$

da $P_1 \cap \rho P' \cap A \cap \rho B = P_2 \cap \rho P' \cap A \cap \rho B$ gilt, $A \cap \rho B$ offen ist und Φ_j lokal erklärt ist. Nach Satz 4.2.2 gibt es also Konstanten $c_0, \ldots, c_n \geq 0$, die nicht von P und A abhängen, so daß

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(P \cap \rho P', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(P, A)$$

gilt für alle $P \in \mathcal{P}$ und alle $A \in \mathcal{B}(S^n)$. Setzt man $P = S_k$ mit $S_k \in \mathcal{S}_k$, $k \in \{0, \ldots, n\}$, und $A = S^n$, so ist $\Phi_l(P, A) = \delta_{kl}$ und daher

$$c_k = \int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(S_k \cap \rho P', \rho B)\, d\nu(\rho)\,.$$

Läßt man hier beliebige $B \in \mathcal{B}(S^n)$ zu, so kann man wie oben Satz 4.2.2 anwenden, und man erhält mit gewissen Konstanten $b_{ik} \geq 0$, die unabhängig sind von P' und B, die Gleichung

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} b_{ik} \Phi_i(P', B) = \int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(S_k \cap \rho P', \rho B)\, d\nu(\rho)\,.$$

Wählt man speziell $P' = S_i \in \mathcal{S}_i$ und $B = S^n$, so ist $S_k \cap \rho S_i \in \mathcal{S}_l$ mit $l = \max\{-1, k + i - n\}$ für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ nach Hilfssatz 5.1.3 und daher

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = n + j - k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $c_0 = \cdots = c_{j-1} = 0$ und $c_k = \Phi_{n+j-k}(P', B)$ für $k \in \{j, \ldots, n\}$, somit gilt

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(P \cap \rho P', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j}^{n} \Phi_k(P, A)\Phi_{n+j-k}(P', B) \tag{5.2}$$

für alle $P, P' \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{B}(S^n)$ und offene $B \subset S^n$; da beide Seiten jedoch Maße sind in B, kann man in (5.2) auch beliebige Borel-Mengen $B \in \mathcal{B}(S^n)$ zulassen.

Wir schieben eine kleine Zwischenbetrachtung ein. Es seien zwei Polytope $P, P' \in \mathcal{P}$ gegeben, und eines davon, etwa P, sei keine Untersphäre. Man kann für diesen Fall Formel (5.2) dazu benutzen, das Maß der Menge aller Drehungen ρ, für die $P \cap \rho P' \neq \emptyset$ ist, explizit zu berechnen. Für alle $\rho \in SO_{n+1} \backslash SO_{n+1}(P, P')$ ist dann $P \cap \rho P' = \emptyset$ oder $P \cap \rho P' \notin \mathcal{S}$ nach Hilfssatz 5.1.5, und nach der Bemerkung 1 im Anschluß an Korollar 4.3.3 gilt für diese ρ

$$2 \sum_{k=0}^{[n/2]} V_{2k}(P \cap \rho P') = \begin{cases} 1, & \text{falls } P \cap \rho P' \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } P \cap \rho P' = \emptyset \,. \end{cases}$$

Wir erhalten daher unter Verwendung von Hilfssatz 5.1.4 und Gleichung (5.2)

$$\begin{aligned} \nu(\{\rho \in SO_{n+1} : P \cap \rho P' \neq \emptyset\}) &= 2 \int\limits_{SO_{n+1}} \sum_{k=0}^{[n/2]} V_{2k}(P \cap \rho P')\, d\nu(\rho) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{l=2k}^{n} V_l(P) V_{n+2k-l}(P') \,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Nun wollen wir in Gleichung (5.2) das Polytop P durch einen allgemeinen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}$ ersetzen. Um die Meßbarkeitsüberlegungen wie zuvor durchführen zu können, müssen wir zeigen, daß die Menge aller $\rho \in SO_{n+1}$, für die K und $\rho P'$ sich berühren, eine ν-Nullmenge ist. Wir können voraussetzen, daß K keine Untersphäre ist, und wählen Polytope $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, die ebenfalls keine Untersphären sind, mit $P_1 \subset K \subset P_2$. Es gilt

$$\begin{aligned} &SO_{n+1}(K, P') \subset \\ &\quad \subset SO_{n+1}(P_1, P') \cup \Big(\{\rho \in SO_{n+1} : P_2 \cap \rho P' \neq \emptyset\} \backslash \{\rho \in SO_{n+1} : P_1 \cap \rho P' \neq \emptyset\}\Big) \,. \end{aligned}$$

Wir können daher $\nu(SO_{n+1}(K, P'))$ mit Hilfe von Gleichung (5.3) und Hilfssatz 5.1.4 nach oben abschätzen; wir erhalten

$$\nu(SO_{n+1}(K, P')) \leq 2 \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{l=2k}^{n} (V_l(P_2) - V_l(P_1)) V_{n+2k-l}(P') \,.$$

Da wir K durch die Polytope P_1 und P_2 im Sinne der Hausdorff-Metrik gemäß Hilfssatz 2.5 beliebig genau approximieren können und die inneren Volumina stetig sind, erhalten wir $\nu(SO_{n+1}(K,P')) = 0$. Das zuvor verwendete Meßbarkeitsargument zeigt daher, daß für alle $K \in \mathcal{K}, P' \in \mathcal{P}$ und alle $A, B \in \mathcal{B}(S^n)$ die Abbildung

$$\rho \mapsto \Phi_j(K \cap \rho P', A \cap \rho B)$$

ν-fast überall mit einer meßbaren Abbildung übereinstimmt.

Eine maßtheoretische Standard-Schlußweise (vgl. [42], S. 66 f.) zeigt, daß die Gültigkeit von

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(K \cap \rho P', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j}^{n} \Phi_k(K, A)\Phi_{n+j-k}(P', B) \tag{5.4}$$

für alle $A, B \in \mathcal{B}(S^n)$ äquivalent ist zu

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \int\limits_{S^n} f(x)g(\rho^{-1}x)\, d\Phi_j(K \cap \rho P', x)\, d\nu(\rho)$$

$$= \sum_{k=j}^{n} \int\limits_{S^n} f\, d\Phi_k(K,\cdot) \int\limits_{S^n} g\, d\Phi_{n+j-k}(P',\cdot) \tag{5.5}$$

für alle stetigen Funktionen $f, g : S^n \to \mathbb{R}$. Approximiert man nun K durch eine Polytopfolge und benutzt man Hilfssatz 5.1.2, die schwache Stetigkeit der Krümmungsmaße, $\nu(SO_{n+1}(K,P')) = 0$ und und den Satz von der majorisierten Konvergenz, so erhält man (5.5) und damit (5.4).

Nun kann man in einem weiteren Schritt auch P' in genau derselben Weise durch einen allgemeinen konvexen Körper K' ersetzen: Zuerst benutze man (5.4), Hilfssatz 5.1.5, die Gleichung $\nu(SO_{n+1}(K,P')) = 0$ und Korollar 4.3.3, um $\nu(SO_{n+1}(K,K')) = 0$ zu zeigen. Dann zeigt das obige Meßbarkeitsargument, daß das Integral in (5.1) erklärt ist. Die Aussage des Satzes für beliebige $K, K' \in \mathcal{K}$ erhält man nun wie oben durch Approximation.

Der Übergang von konvexen Körpern zu Mengen des Konvexrings kann genau wie in [42], S. 75, geschehen; der besseren Übersichtlichkeit halber führen wir das Argument hier aus. Es sei $K \in \mathcal{R}$ eine Menge des Konvexrings, und sei $K' \in \mathcal{K}$ nach wie vor ein konvexer Körper. Wählen wir eine Darstellung $K = \cup_{i=1}^m K_i$ mit $K_i \in \mathcal{K}$, so gilt

$$\Phi_j(K \cap \rho K', \cdot) = \sum_{v \in S(m)} (-1)^{|v|-1} \Phi_j(K_v \cap \rho K', \cdot)$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(K \cap \rho K', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) \\
&\quad = \sum_{v \in S(m)} (-1)^{|v|-1} \int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(K_v \cap \rho K', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) \\
&\quad = \sum_{v \in S(m)} (-1)^{|v|-1} \sum_{k=j}^{n} \Phi_k(K_v, A) \Phi_{n+j-k}(K', B) \\
&\quad = \sum_{k=j}^{n} \Phi_k(K, A) \Phi_{n+j-k}(K', B)\,.
\end{aligned}$$

(Zur Notation bei der Anwendung des Einschließungs-Ausschließungs-Prinzips vgl. das Ende von Kapitel 2.) Nun kann in einem zweiten Schritt völlig analog auch K' durch eine Menge des Konvexrings ersetzt werden. ■

Bemerkung: Beim Beweis der kinematischen Hauptformel für Polytope haben wir uns hier auf den Kennzeichnungssatz 4.2.2 für Krümmungsmaße gestützt. Eine Beweisalternative würde darin bestehen, für den Fall von Polytopen eine Version der kinematischen Hauptformel für Stützmaße zu zeigen, indem man den Kennzeichnungssatz 4.2.1 für Stützmaße verwendet, und dann die Formel für Krümmungsmaße durch Spezialisierung zu gewinnen. Dieses Vorgehen hätte insofern elementareren Charakter, als dabei neben Meßbarkeitsaussagen nur die Charakterisierbarkeit des sphärischen Lebesgue-Maßes durch seine Drehinvarianz und Normierung eingeht, nicht jedoch das weniger elementare Ergebnis aus Hilfssatz 4.2.3. Da wir aber den Einsatz von Satz 4.2.1 in den Kapiteln 6 und 7 noch demonstrieren werden, haben wir es vorgezogen, uns in diesem Abschnitt auf Satz 4.2.2 zu berufen; dies ermöglicht hier eine elegantere Argumentation. (Satz 4.2.2 werden wir ohnehin noch beim Beweis der „abstrakten“ kinematischen Hauptformel in Abschnitt 5.3 zu verwenden haben.) Anzumerken wäre vielleicht noch, daß ein Verwenden von Satz 4.2.1 – was die eingesetzten Hilfsmittel angeht – der Beweismethode von Schneider & Weil [41, 42] für die kinematische Hauptformel für Krümmungsmaße von Polytopen in $\mathbb{R}^n$ entsprechen würde.

5.2 Folgerungen aus der kinematischen Hauptformel

Aus der kinematischen Hauptformel gewinnen wir nun einige, z.T. einfache, aber dennoch bemerkenswerte Folgerungen. Wir notieren zunächst ein Resultat, das wir im Verlauf des Beweises von Satz 5.1.1 gewonnen haben.

Korollar 5.2.1. *Für $K, K' \in \mathcal{K}$ gilt $\nu(SO_{n+1}(K, K')) = 0$.*

Bemerkung: Der Beweis von Satz 5.1.1 zog sich dadurch etwas in die Länge, daß man in mehreren Schritten die Aussage von Korollar 5.2.1 zeigen mußte. Diese Aussage folgt aber auch in einfacher Weise aus Corollary 2.3.11 in Schneider [39]. Da der Beweis dieses Resultats aber sehr aufwendig ist, haben wir für unsere Zwecke die obige elementarere Argumentation vorgezogen.

Durch Spezialisierung gewinnen wir aus Satz 5.1.1 die folgenden beiden Korollare.

Korollar 5.2.2. *Ist $K \in \mathcal{R}$ und $A \in \mathcal{B}(S^n)$, so gilt*

$$\int_{\mathcal{S}_q} \Phi_j(K \cap S, A \cap S)\, d\nu_q(S) = \Phi_{n+j-q}(K, A)\,.$$

für alle $q \in \{0, \ldots, n\}$ und $j \in \{0, \ldots, q\}$.

Korollar 5.2.3. *Sind $K, K' \in \mathcal{R}$, so gilt*

$$\int_{SO_{n+1}} V_j(K \cap \rho K')\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j}^{n} V_k(K) V_{n+j-k}(K')$$

für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$.

In einer klassischen Version der kinematischen Hauptformel im euklidischen Raum tritt als Integrand die Euler-Charakteristik des Schnittes des ruhenden und des bewegten Körpers auf. Nach Korollar 4.3.3 kann man die Euler-Charakteristik $\chi(K)$ eines Elementes des Konvexrings $K \in \mathcal{R}$ durch

$$\chi(K) = 2 \sum_{k=0}^{[n/2]} V_{2k}(K)$$

mit Hilfe der inneren Volumina ausdrücken. Wir erhalten daher:

Korollar 5.2.4. *Für $K, K' \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\int_{SO_{n+1}} \chi(K \cap \rho K')\, d\nu(\rho) = 2 \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{l=2k}^{n} V_l(K) V_{n+2k-l}(K')\,.$$

Für das Maß der Menge der Drehungen, die einen konvexen Körper K' in Trefflage zu einem zweiten konvexen Körper K bringen, wurde in Spezialfällen schon im Beweis von Satz 5.1.1 ein expliziter Ausdruck angegeben. Allgemein gilt folgendes:

Korollar 5.2.5. *Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ und ist $K \notin \mathcal{S}$, so gilt*

$$\nu(\{\rho \in SO_{n+1} : K \cap \rho K' \neq \emptyset\}) = 2 \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{l=2k}^{n} V_l(K) V_{n+2k-l}(K')\,;$$

mit $\mathcal{S}_q(K) := \{S \in \mathcal{S}_q : K \cap S \neq \emptyset\}$ gilt speziell für $K \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$

$$\nu_q(\mathcal{S}_q(K)) = 2 \sum_{k=0}^{[q/2]} V_{n-q+2k}(K)$$

für alle $q \in \{0, \ldots, n\}$.

Beweis: Wegen Hilfssatz 5.1.5 ist $\chi(K \cap \rho K') \in \{0, 1\}$ und $\chi(K \cap \rho K') = 1 \iff K \cap \rho K' \neq \emptyset$ für alle $\rho \in SO_{n+1} \backslash SO_{n+1}(K, K')$. Wegen $\nu(SO_{n+1}(K, K')) = 0$ folgt die Aussage daher aus Korollar 5.2.4. ■

Bemerkung: Die in Abschnitt 4.2 definierten Funktionale $U_j = \sum_{k=0}^{[(n-j)/2]} V_{j+2k}$ auf $\mathcal{K}$ erfahren durch Korollar 5.2.5 eine geometrische Interpretation, die einer bekannten Eigenschaft der euklidischen Quermaßintegrale entspricht. Aus diesem Grund sind daher auch die Funktionale U_j als sphärische Analoga der Quermaßintegrale bezeichnet worden. Nach Korollar 5.2.5 sind die U_j auf $\mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$ monoton wachsend bez. der Inklusion, und man könnte eine Entsprechung zu Hadwigers „zweitem Funktionalsatz“ für die U_j vermuten; in Abschnitt 4.2 haben wir eine solche Aussage als Problem formuliert.

Für $K \in \mathcal{K}$ mit int $K \neq \emptyset$ ist nach Satz 4.4.3 die Oberfläche von K bis auf einen Faktor gleich $V_{n-1}(K)$. Die Gleichung

$$V_{n-1}(K) = \frac{1}{2}\,\nu_1(\mathcal{S}_1(K))$$

($K \notin \mathcal{S}$) verdient daher besonderes Interesse. Wie schon erwähnt, ist $V_{n-1} = U_{n-1}$ monoton wachsend auf $\mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$ in bezug auf die Inklusion, und wegen Gleichung (4.1), S. 36, ist entsprechend V_0 monoton fallend auf $\mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$. Das Beispiel einer Halbsphäre und der sie berandenden $(n-1)$-Sphäre zeigt, daß V_{n-1} nicht auf ganz $\mathcal{K}$ monoton wachsend ist.

Aus der kinematischen Hauptformel kann man leicht eine integralgeometrische Formel für die in Abschnitt 3.2 eingeführten Krümmungsvektoren k_j ableiten:

Korollar 5.2.6. *Für $K, K' \in \mathcal{K}$ und $j \in \{0, \ldots, n\}$ gilt*

$$\int\limits_{SO_{n+1}} k_j(K \cap \rho K')\, d\nu(\rho) = \sum_{l=j}^{n} k_l(K) V_{n+j-l}(K') \,.$$

Beweis: Wie im Beweis von Satz 5.1.1 erwähnt, ist die Gleichung

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \int\limits_{S^n} f(x)\, d\Phi_j(K \cap \rho K', x) d\nu(\rho) = \sum_{l=j}^{n} \int\limits_{S^n} f\, d\Phi_l(K, \cdot)\, V_{n+j-l}(K')$$

für alle stetigen Funktionen $f : S^n \to \mathbb{R}$ eine direkte Folgerung der kinematischen Hauptformel. Setzen wir $f(x) := x_i$ für $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, so ergibt sich die Behauptung. (Man kann die obige Formel analog auch für $K, K' \in \mathcal{R}$ formulieren und beweisen.) ■

Aus den bisher behandelten Schnittformeln lassen sich durch Übergang zu den Polarkörpern weitere integralgeometrische Formeln gewinnen. In dem folgenden Korollar geben wir globale Formeln an, die sich in einfacher Weise aus Satz 5.1.1 ableiten lassen. Wir bemerken, daß man das in Abschnitt 4.3 durch $V_{-1}(K) := V_n(K^*)$ definierte Funktional V_{-1} aufgrund von Satz 4.3.1 mittels der inneren Volumina ausdrücken kann: Es gilt $V_{-1} = 1 - \sum_{i=0}^{n} V_i$.

Korollar 5.2.7. *Sind $K, K' \in \mathcal{K}$, so gilt für $j \in \{-1, \ldots, n-1\}$ die Gleichung*

$$\int\limits_{SO_{n+1}} V_j(K \vee \rho K')\, d\nu(\rho) = \sum_{k=-1}^{j} V_k(K) V_{j-k-1}(K') \,;$$

ferner gilt

$$\int\limits_{SO_{n+1}} V_n(K \vee \rho K')\, d\nu(\rho) = 1 - \sum_{k=-1}^{n-1} \sum_{l=-1}^{k} V_l(K) V_{k-l-1}(K') \,.$$

Beweis: Wegen $(K \cap \rho K')^* = K^* \vee \rho K'^*$ und Gleichung (4.1), S. 36, ergibt sich die erste Gleichung aus Korollar 5.2.3 durch Übergang zu den Polarkörpern. Nach Satz 4.3.1 gilt

$$V_n(K \vee \rho K') = 1 - \sum_{k=-1}^{n-1} V_k(K \vee \rho K') \,,$$

daher folgt die zweite Gleichung aus der ersten. ■

Bemerkung: Bei der ersten der beiden Gleichungen von Korollar 5.2.7 ist zu beachten, daß effektiv nur über die Menge aller ρ integriert wird, für die K und $\rho K'$ in einer Halbsphäre enthalten sind; wegen $V_j(S^n) = 0$ für $j \in \{-1, \dots, n-1\}$ ist der Integrand auf dem Komplement dieser Menge gleich Null. Eine weitreichende Verallgemeinerung unter Verwendung der Stützmaße wird in Kapitel 6 behandelt.

„Duale“ kinematische Formeln gibt es auch für die Krümmungsvektoren. Nach Hilfssatz 3.2.4 gilt

$$k_j(K) = -\alpha_j k_{n-j}(K^*)$$

für alle $K \in \mathcal{K}$ und alle $j \in \{0, \dots, n\}$, wobei

$$\alpha_j = \frac{(n-j)\beta_{n-j}\beta_{j-1}}{j\beta_j\beta_{n-j-1}},\ j \in \{1, \dots, n-1\}, \qquad \text{und} \qquad \alpha_n = \frac{1}{\alpha_0} = \frac{2\beta_{n-1}}{n\beta_n}$$

ist. Mit Korollar 5.2.6 und Gleichung (4.1) erhalten wir daher das folgende Ergebnis:

Korollar 5.2.8. *Für $K, K' \in \mathcal{K}$ und $j \in \{0, \dots, n\}$ gilt*

$$\int_{SO_{n+1}} k_j(K \vee \rho K')\, d\nu(\rho) = \sum_{l=0}^{j} \frac{\alpha_j}{\alpha_l}\ k_l(K) V_{j-l-1}(K')\,.$$

Ist $K \in \mathcal{K}$ und ist K' eine Untersphäre, so gelangt man beim Dualisieren der kinematischen Hauptformel schnell zu Gleichungen, die in Analogie stehen zu den Projektionsformeln der euklidischen Integralgeometrie. In diesem Abschnitt behandeln wir die Projektionsformeln nur in ihren globalen Versionen, für lokale Verallgemeinerungen sehe man Kapitel 6.

Ist $K \in \mathcal{K}$ und ist $S \in \mathcal{S}$, so sei

$$K|S := (K \vee S^*) \cap S$$

die *Projektion* von K in S. Ist $K \cap S^* = \emptyset$, so ist $K|S$ das Bild von K unter der metrischen Projektion auf S. Wir benötigen den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 5.2.9. *Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $S \in \mathcal{S}$. Dann ist $K^* \cap S$ der Polarkörper von $K|S$ in der Untersphäre S. Gilt $K \cap S^* \neq \emptyset$, so ist $K^* \cap S = \emptyset$ ($\Longleftrightarrow$ $K|S = S$), oder es berühren sich K und S^*. Gilt $K \cap S^* = \emptyset$ und ist $K \notin \mathcal{S}$, so ist $K|S \neq S$.*

Beweis: Der konvexe Körper $(K^* \cap S)^* \cap S$ ist der Polarkörper von $K^* \cap S$, gebildet in der Untersphäre S. Wegen $K|S = (K \vee S^*) \cap S = (K^* \cap S)^* \cap S$ gilt die erste Behauptung.

Ist $K \cap S^* \neq \emptyset$ und $K|S \neq S$, so ist $K \vee S^* \neq S^n$ nach Definition von $K|S$. Es existiert also eine abgeschlossene Halbsphäre, die $K \vee S^*$ enthält. Da $S^* \in \mathcal{S}$ ist, ist S^* in ihrem Rand enthalten, und dieser trennt damit S^* und K.

Ist $K \cap S^* = \emptyset$ und ist $K \notin \mathcal{S}$, so haben die euklidisch konvexen Körper $\overline{K}, \overline{S^*} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ keine relativ inneren Punkte gemeinsam. Es existiert daher eine Hyperebene in $\mathbb{R}^{n+1}$, die $\overline{K}$ und $\overline{S^*}$ trennt ([39], Theorem 1.3.8). Sei H der Schnitt dieser Hyperebene mit S^n. Wegen $o \in \overline{K} \cap \overline{S^*}$ gilt $H \in \mathcal{S}_{n-1}$ und wegen $S^* \in \mathcal{S}$ gilt $S^* \subset H$. Sei $u \in H^*$ mit $K \subset H \vee \{u\}$. Dann gilt $K \vee S^* \subset H \vee \{u\}$ und damit $K|S \subset S \cap (H \vee \{u\}) \neq S$. ■

Korollar 5.2.10. *Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $q \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{S}_q} V_j(K|S)\, d\nu_q(S) = V_j(K)$$

für $j \in \{0, \ldots, q-1\}$.

Beweis: Die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{S}_q} V_j(K|S)\, d\nu_q(S) \\
&= \int_{\{S\in\mathcal{S}_q : K\cap S^*=\emptyset\}} V_j(K|S)\, d\nu_q(S) + \int_{\{S\in\mathcal{S}_q : K\cap S^*\neq\emptyset\}} V_j(K|S)\, d\nu_q(S) \\
&= \int_{\{S\in\mathcal{S}_q : K\cap S^*=\emptyset\}} V_j(K|S)\, d\nu_q(S) \\
&= \int_{\{S\in\mathcal{S}_q : K\cap S^*=\emptyset\}} V_{q-j-1}(K^* \cap S)\, d\nu_q(S) \\
&= \int_{\{S\in\mathcal{S}_q : K\cap S^*=\emptyset\}} V_{q-j-1}(K^* \cap S)\, d\nu_q(S) + \int_{\{S\in\mathcal{S}_q : K\cap S^*\neq\emptyset\}} V_{q-j-1}(K^* \cap S)\, d\nu_q(S) \\
&= \int_{\mathcal{S}_q} V_{q-j-1}(K^* \cap S)\, d\nu_q(S) \\
&= V_{n-j-1}(K^*) \\
&= V_j(K)
\end{aligned}$$

zeigt die Behauptung; benutzt haben wir dabei die ersten beiden Aussagen von Hilfssatz 5.2.9, $\nu(SO_{n+1}(K, S^*)) = 0$, Korollar 5.2.3 und Gleichung (4.1). ■

Bemerkung: Korollar 5.2.10 wird in Kapitel 6 durch eine lokalisierte Fassung wesentlich verallgemeinert werden.

Auch für den Fall $j = q$ gibt es eine Projektionsformel. Da hier die Ableitung aus der kinematischen Hauptformel weniger direkt als bei den bisherigen Resultaten ausfällt, formulieren wir das Ergebnis als Satz.

Satz 5.2.11. *Für $q \in \{0, \dots, n\}$ und konvexe Körper $K \in \mathcal{K}$ gilt*

$$\int_{\mathcal{S}_q} V_q(K|S)\, d\nu_q(S) = \sum_{k=q}^{n} V_k(K)\,.$$

Beweis: Es sei $K \in \mathcal{K}$, und es sei $q \in \{0, \dots, n\}$. Ist $K \in \mathcal{S}_j$ mit $j \in \{0, \dots, q-1\}$, so ist $\dim(K \vee S^*) < n$ und daher $\dim(K|S) < q$ für alle $S \in \mathcal{S}_q$. Für $K \in \mathcal{S}_j$ mit $j \in \{q, \dots, n\}$ ist $K \vee S^* = S^n$ und damit $K|S = S$ für ν_q-fast alle $S \in \mathcal{S}_q$. Die behauptete Formel ist daher im Fall $K \in \mathcal{S}$ richtig. Wir können daher von nun an $K \notin \mathcal{S}$ annehmen.

Wir stellen zunächst einige Hilfsmittel zusammen. Für $T \in \mathcal{S}_{n-q-1}$ betrachten wir die durch $T^* \to \mathcal{S}_{n-q}$, $x \mapsto T \vee \{x, -x\}$, definierte Abbildung. Das Bildmaß des auf 1 normierten sphärischen Lebesgue-Maßes auf T^* unter dieser (stetigen) Abbildung bezeichnen wir mit ν_{n-q}^T. Aus Schneider & Weil [42], (6.7), S. 150, folgert man unschwer die Beziehung

$$\nu_{n-q}(A) = \int_{\mathcal{S}_{n-q-1}} \nu_{n-q}^T(A)\, d\nu_{n-q-1}(T) \tag{5.6}$$

für beliebige $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{n-q})$.

Ist $S \in \mathcal{S}_q$ mit $K \cap S^* = \emptyset$, so ist $K|S \neq S$ wegen $K \notin \mathcal{S}$ nach Hilfssatz 5.2.9, und es gilt die Äquivalenz

$$K \cap R \neq \emptyset \iff (K \vee S^*) \cap R \neq \emptyset \iff (K|S) \cap R \neq \emptyset$$

für jedes $R \in \mathcal{S}_{n-q}$ mit $S^* \subset R$. Wir erinnern an die Bezeichnung $\mathcal{S}_q(K) := \{S \in \mathcal{S}_q : K \cap S \neq \emptyset\}$. Da $\nu_{n-q}^{S^*}$ auf der Menge $\{R \in \mathcal{S}_{n-q} : S^* \subset R\}$ konzentriert ist, gilt daher für alle $S \in \mathcal{S}_q$ mit $K \cap S^* = \emptyset$

$$\begin{aligned} \nu_{n-q}^{S^*}(\mathcal{S}_{n-q}(K)) &= \nu_{n-q}^{S^*}(\mathcal{S}_{n-q}(K|S)) \\ &= \frac{1}{\beta_q}\lambda^q((K|S) \cup -(K|S)) \\ &= 2V_q(K|S)\,, \end{aligned}$$

wobei die Definition des Maßes $\nu_{n-q}^{S^*}$ Anwendung fand. Für $S \in \mathcal{S}_q$ mit $K \cap S^* \neq \emptyset$ gilt im übrigen

$$\nu_{n-q}^{S^*}(\mathcal{S}_{n-q}(K)) = 1\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\{S\in\mathcal{S}_q:K\cap S^*=\emptyset\}} V_q(K|S)\,d\nu_q(S) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\{S\in\mathcal{S}_q:K\cap S^*=\emptyset\}} \nu_{n-q}^{S^*}(\mathcal{S}_{n-q}(K))\,d\nu_q(S) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathcal{S}_q} \nu_{n-q}^{S^*}(\mathcal{S}_{n-q}(K))\,d\nu_q(S) - \nu_q(\{S\in\mathcal{S}_q : K\cap S^*\neq\emptyset\})\Big)\,.
\end{aligned}$$

Aus der Definition der Maße ν_q und ν_{n-q-1} entnimmt man unmittelbar

$$\nu_q(A) = \nu_{n-q-1}(\{T\in\mathcal{S}_{n-q-1} : T^*\in A\})$$

für alle $A\in\mathcal{B}(\mathcal{S}_q)$. Damit erhalten wir aus dem eben Gezeigten unter Verwendung von (5.6)

$$\begin{aligned}
&\int_{\{S\in\mathcal{S}_q:K\cap S^*=\emptyset\}} V_q(K|S)\,d\nu_q(S) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathcal{S}_{n-q-1}} \nu_{n-q}^{T}(\mathcal{S}_{n-q}(K))\,d\nu_{n-q-1}(T) - \nu_{n-q-1}(\mathcal{S}_{n-q-1}(K))\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\nu_{n-q}(\mathcal{S}_{n-q}(K)) - \nu_{n-q-1}(\mathcal{S}_{n-q-1}(K))\Big)\,.
\end{aligned}$$

Ist $K\cap S^*\neq\emptyset$, so ist $K|S=S$ und damit $V_q(K|S)=1$, oder es berühren sich K und S^* (Hilfssatz 5.2.9). Wegen $\nu(SO_{n+1}(K,S^*))=0$ ist daher

$$\begin{aligned}
\int_{\{S\in\mathcal{S}_q:K\cap S^*\neq\emptyset\}} V_q(K|S)\,d\nu_q(S) &= \nu_q(\{S\in\mathcal{S}_q : K\cap S^*\neq\emptyset\}) \\
&= \nu_{n-q-1}(\mathcal{S}_{n-q-1}(K))\,.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_q} V_q(K|S)\,d\nu(S) &= \frac{1}{2}\Big(\nu_{n-q}(\mathcal{S}_{n-q}(K)) + \nu_{n-q-1}(\mathcal{S}_{n-q-1}(K))\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(2\sum_{k=0}^{[(n-q)/2]} V_{q+2k}(K) + 2\sum_{k=0}^{[(n-q-1)/2]} V_{q+2k+1}(K)\Big) \\
&= \sum_{k=q}^{n} V_k(K)\,,
\end{aligned}$$

wobei Korollar 5.2.5 verwendet wurde. ■

Bemerkung: Aufgrund von Satz 5.2.11 könnte man auch die Funktionale $W_j := \sum_{k=j}^n V_k$ auf $\mathcal{K}$ als sphärische Analoga zu den euklidischen Quermaßintegralen ansehen. Die globalen Projektionsformeln hätten bei Verwendung dieser Funktionale die einfache Gestalt

$$\int_{S\in\mathcal{S}_q} W_j(K|S)\,d\nu_q(S) = W_j(K)$$

für alle $K \in \mathcal{K}$ und $j \in \{0,\ldots,q\}$. Aus Satz 5.2.11 folgt die Monotonie der Funktionale W_j auf $\mathcal{K}$. Die in Abschnitt 4.2 im Zusammenhang mit den W_j formulierte Frage steht also in enger Verbindung mit Hadwigers „zweitem Funktionalsatz" für euklidische Quermaßintegrale.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem Beispiel für die Anwendbarkeit der kinematischen Hauptformel und ihrer Folgerungen in der stochastischen Geometrie beschließen. Es soll eine spezielle geometrisch definierte Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

Unter einem uniformen zufälligen Punkt in S^n verstehen wir eine Zufallsvariable mit Werten in dem meßbaren Raum $(S^n, \mathcal{B}(S^n))$, deren Verteilung mit dem zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß normierten sphärischen Lebesgue-Maß übereinstimmt. Es sei nun $m \in \mathbb{N}$, und es seien $m+1$ unabhängige uniforme zufällige Punkte $X_0,\ldots,X_m$ in S^n gegeben. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der die Punkte $X_0,\ldots,X_m$ in einer passenden abgeschlossenen Halbsphäre enthalten sind.

Als Hilfsmittel verwenden wir Iterationen der globalen Version der kinematischen Hauptformel. Sind $K_0,\ldots,K_m \in \mathcal{K}$ und ist $j \in \{0,\ldots,n\}$, so gilt

$$\begin{aligned}\int_{SO_{n+1}} \cdots \int_{SO_{n+1}} & V_j(K_0 \cap \rho_1 K_1 \cap \cdots \cap \rho_m K_m)\,d\nu(\rho_m)\cdots d\nu(\rho_1) \\ &= \sum_{\substack{j_0,\ldots,j_m=j \\ j_0+\cdots+j_m=mn+j}}^{n} V_{j_0}(K_0)\cdots V_{j_m}(K_m)\,,\end{aligned}$$

wie man durch einfache Induktion aus Korollar 5.2.3 folgern kann. Mit Hilfe der Gauß-Bonnet-Formel erhält man somit

$$\begin{aligned}\int_{SO_{n+1}} \cdots \int_{SO_{n+1}} & \chi(K_0 \cap \rho_1 K_1 \cap \cdots \cap \rho_m K_m)\,d\nu(\rho_m)\cdots d\nu(\rho_1) \\ &= 2\sum_{i=0}^{[n/2]} \sum_{\substack{j_0,\ldots,j_m=2i \\ j_0+\cdots+j_m=mn+2i}}^{n} V_{j_0}(K_0)\cdots V_{j_m}(K_m)\,.\end{aligned}$$

Punkte $x_0,\ldots,x_m \in S^n$ sind genau dann in einer passenden abgeschlossenen Halbsphäre enthalten, wenn die $m+1$ Halbsphären $\{x_0\}^*,\ldots,\{x_m\}^*$ nichtleeren Schnitt besitzen. Wählen wir daher $K_0 = \cdots = K_m := K$ mit einer beliebigen abgeschlossenen Halbsphäre K, so folgt aus Hilfssatz 5.1.5 und Korollar 5.2.1, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit p gegeben ist durch

$$\begin{aligned} p &= \int_{SO_{n+1}} \cdots \int_{SO_{n+1}} \chi(K \cap \rho_1 K \cap \cdots \cap \rho_m K)\, d\nu(\rho_m) \cdots d\nu(\rho_1) \\ &= 2 \sum_{i=0}^{[n/2]} \sum_{\substack{j_0,\ldots,j_m=2i \\ j_0+\cdots+j_m=mn+2i}}^{n} V_{j_0}(K) \cdots V_{j_m}(K) \\ &= \sum_{i=0}^{[n/2]} \sum_{\substack{j_0,\ldots,j_m \in \{n-1,n\} \\ j_0+\cdots+j_m=mn+2i}}^{n} \frac{1}{2^m}, \end{aligned}$$

denn es gilt $V_0(K) = \cdots = V_{n-2}(K) = 0$ und $V_{n-1}(K) = V_n(K) = 1/2$. Sind genau k der Zahlen $j_0, \ldots, j_m \in \{n-1, n\}$ mit $j_0 + \cdots + j_m = mn + 2i$ gleich $n-1$, so gilt $k = n - 2i$. Damit erhalten wir

$$p = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{m+1}{n-2i} = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i}.$$

Diese Formel für die gesuchte Wahrscheinlichkeit wurde auf völlig anderem Wege zuerst von Wendel [47] bewiesen. Auf die Möglichkeit einer Ableitung aus der sphärischen kinematischen Hauptformel hat Miles [24], S. 155, hingewiesen.

5.3 Die abstrakte lokale kinematische Formel

Die folgende Aussage stellt eine direkte Konsequenz von Satz 4.2.2 dar: Es sei $\Lambda : \mathcal{K} \times \mathcal{B}(S^n) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den folgenden fünf Eigenschaften. (a) Für alle $K \in \mathcal{K}$ ist $\Lambda(K, \cdot)$ ein auf K konzentriertes, endliches positives Maß; (b) die Abbildung $K \mapsto \Lambda(K, \cdot)$ ist additiv; (c) die Abbildung $K \mapsto \Lambda(K, \cdot)$ ist schwach stetig; (d) Λ ist lokal erklärt; (e) Λ ist drehkovariant (die letzten beiden Eigenschaften seien hier im gleichen Sinn wie in Satz 4.1.3 verstanden). Dann ist Λ als Linearkombination der Krümmungsmaße $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ darstellbar. Eine Anwendung der kinematischen Hauptformel aus Satz 5.1.1 ergibt daher

$$\int_{SO_{n+1}} \Lambda(K \cap \rho K', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k(K, A) \Phi_{n-k}(K', B) \tag{5.7}$$

für alle $K, K' \in \mathcal{K}$ und $A, B \in \mathcal{B}(S^n)$, wobei die Λ_k ihrerseits Linearkombinationen der Krümmungsmaße sind. Wählt man für K' speziell j-dimensionale Untersphären,

$j \in \{0, \dots, n\}$, und setzt man $B = S^n$, so erhält man die Darstellung

$$\Lambda_j(K, A) = \int_{\mathcal{S}_{n-j}} \Lambda(K \cap S, A)\, d\nu_{n-j}(S)\,.$$

Wie in diesem Abschnitt gezeigt werden soll, gelten Formeln vom Typ (5.7) auch für Maße $\Lambda(K, \cdot)$, $K \in \mathcal{K}$, die nicht als Linearkombinationen von Krümmungsmaßen darstellbar sind. Von den oben genannten Forderungen an Λ soll nämlich nun die Eigenschaft (e) der Drehkovarianz wegfallen. Am Ende dieses Abschnitts werden wir durch Angabe von Beispielen demonstrieren, daß damit eine weit größere Klasse von Maßen zur Betrachtung zugelassen wird.

Wir beginnen nun, die angestrebte „abstrakte“ Version der kinematischen Hauptformel zu formulieren. Es sei eine Abbildung $\Lambda : \mathcal{K} \times \mathcal{B}(S^n) \to \mathbb{R}$ mit den folgenden vier Eigenschaften gegeben:

(a) Für alle $K \in \mathcal{K}$ ist $\Lambda(K, \cdot)$ ein auf K konzentriertes (endliches) Maß.

(b) Die Abbildung $K \mapsto \Lambda(K, \cdot)$ ist schwach stetig.

(c) Die Abbildung $K \mapsto \Lambda(K, \cdot)$ ist additiv.

(d) Λ ist lokal erklärt, d.h. sind $K, K' \in \mathcal{K}$ und ist $A \subset S^n$ offen mit $K \cap A = K' \cap A$, so gilt $\Lambda(K, B) = \Lambda(K', B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(S^n)$ mit $B \subset A$.

Für $j \in \{0, \dots, n\}$ definieren wir das j-te *assoziierte Maß* Λ_j von $\Lambda(K, \cdot)$ durch

$$\Lambda_j(K, A) := \int_{\mathcal{S}_{n-j}} \Lambda(K \cap S, A)\, d\nu_{n-j}(S)\,.$$

Um zu zeigen, daß das Integral erklärt ist, betrachten wir eine beliebige stetige Funktion $f : S^n \to \mathbb{R}$. Die Abbildung

$$\mathcal{S}_{n-j} \to \mathbb{R}\,, \qquad S \mapsto \int_{S^n} f\, d\Lambda(K \cap S, \cdot)\,,$$

ist dann nach Hilfssatz 5.1.2 bei allen $S \in \mathcal{S}_{n-j}$ stetig, die K nicht berühren. Aus Hilfssatz 7.2.2 in Schneider & Weil [42] folgt daher die Meßbarkeit der Abbildung $S \mapsto \Lambda(K \cap S, A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(S^n)$ auf einer Teilmenge von $\mathcal{S}_{n-j}$ vom Maß 1; das Integral ist also wohldefiniert. Da die Abbildung $K \mapsto \Lambda(K, S^n)$ stetig und der Raum $\mathcal{K}$ kompakt ist (für letzteres vgl. die Bemerkung im Anschluß an Hilfssatz 2.3), existiert eine Zahl $C > 0$ mit $\Lambda(K, A) \leq C$ für alle $K \in \mathcal{K}$ und $A \in \mathcal{B}(S^n)$. Damit gilt auch $\Lambda_j(K, S^n) \leq C$ für alle $K \in \mathcal{K}$. Der Satz von der monotonen Konvergenz zeigt nun, daß $\Lambda_j(K, \cdot)$ ein endliches Maß ist.

Unser Resultat lautet nun wie folgt.

Satz 5.3.1. *Ist $j \in \{0, \ldots, n\}$, so gilt*

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Lambda_j(K \cap \rho K', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j}^{n} \Lambda_k(K, A)\Phi_{n+j-k}(K', B) \tag{5.8}$$

für alle $K, K' \in \mathcal{K}$ und $A, B \in \mathcal{B}(S^n)$.

Wegen $\Lambda_0 = \Lambda$ erhält man aus Satz 5.3.1

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Lambda(K \cap \rho K', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k(K, A)\Phi_{n-k}(K', B)\,,$$

also eine Formel von gleicher Gestalt wie Gleichung (5.7). Für den Spezialfall $\Lambda = \Phi_0$ ist $\Lambda_j = \Phi_j$ nach Korollar 5.2.2 (und da $\Phi_0(K, \cdot)$ auf K konzentriert ist). Unser Ergebnis reduziert sich also in diesem Fall auf die kinematische Hauptformel von Satz 5.1.1.

Beweis: Zunächst muß wieder die Meßbarkeit des Integranden der linken Seite von (5.8) gezeigt werden. Wir weisen dazu nach, daß die assoziierten Maße schwach stetig sind. Ist dies gezeigt, so kann die Meßbarkeit des Integranden wie im Beweis der lokalen kinematischen Hauptformel eingesehen werden. Es sei $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{K}$ mit $\lim_{i\to\infty} K_i = K \in \mathcal{K}$. Ist $S \in \mathcal{S}_{n-j}$ eine Untersphäre, die K nicht berührt, so gilt $\lim_{i\to\infty}(K_i \cap S) = K \cap S$ nach Hilfssatz 5.1.2. Da dies für ν_{n-j}-fast alle $S \in \mathcal{S}_{n-j}$ gilt, folgt wegen der schwachen Stetigkeit von Λ aus dem Lemma von Fatou

$$\liminf_{i\to\infty} \int\limits_{\mathcal{S}_{n-j}} \Lambda(K_i \cap S, A)\, d\nu_{n-j}(S) \geq \int\limits_{\mathcal{S}_{n-j}} \Lambda(K \cap S, A)\, d\nu_{n-j}(S)$$

für alle offenen $A \subset S^n$ und aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{\mathcal{S}_{n-j}} \Lambda(K_i \cap S, S^n)\, d\nu_{n-j}(S) = \int\limits_{\mathcal{S}_{n-j}} \Lambda(K \cap S, S^n)\, d\nu_{n-j}(S)\,.$$

Damit sind die Abbildungen $K \mapsto \Lambda_j(K, \cdot)$ schwach stetig.

Es seien nun $K \in \mathcal{K}$ und eine offene Teilmenge A von S^n gegeben. Wir definieren eine Abbildung $\psi : \mathcal{K} \times \mathcal{B}(S^n) \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(K', B) := \int\limits_{SO_{n+1}} \Lambda_j(K \cap \rho K', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho)\,.$$

Die Eigenschaften (a), (c) und (d) übertragen sich von Λ auf die assoziierten Maße Λ_j und daher auch auf ψ (vgl. den Beweis von Satz 5.1.1). Wegen der Rechtsinvarianz des

Maßes ν ist ψ drehkovariant. Die Einschränkung von ψ auf $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(S^n)$ erfüllt daher die Voraussetzungen des Satzes 4.2.2 über die Charakterisierung positiver Linearkombinationen von Krümmungsmaßen. Es existieren also nur von K und A abhängige Konstanten $c_0, \ldots, c_n \geq 0$ mit

$$\psi(K', B) = \sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_{n-k}(K', B) \tag{5.9}$$

für alle Polytope $K' \in \mathcal{P}$ und alle $B \in \mathcal{B}(S^n)$.

Wir bestimmen nun die Konstanten c_k. Einsetzen von Untersphären für K' und die Wahl $B = S^n$ ergibt

$$c_k = \int_{\mathcal{S}_{n-k}} \Lambda_j(K \cap S_1, A)\, d\nu_{n-k}(S_1) = \int_{\mathcal{S}_{n-k}} \int_{\mathcal{S}_{n-j}} \Lambda(K \cap S_1 \cap S_2, A)\, d\nu_{n-j}(S_2) d\nu_{n-k}(S_1)\,.$$

Ist $k + j > n$ und ist $S_1 \in \mathcal{S}_{n-k}$, so ist $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ für ν_{n-j}-fast alle $S_2 \in \mathcal{S}_{n-j}$ nach Hilfssatz 5.1.3; da $\Lambda(K, \cdot)$ auf K konzentriert ist, gilt deshalb $c_k = 0$ für $k \in \{n - j + 1, \ldots, n\}$. Nun sei $k + j \leq n$. Setzen wir

$$X := \{(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_{n-k} \times \mathcal{S}_{n-j} : \dim(S_1 \cap S_2) = n - k - j\}\,,$$

so gilt $\nu_{n-k} \otimes \nu_{n-j}(X) = 1$, wieder nach Hilfssatz 5.1.3. Das Bildmaß der Einschränkung von $\nu_{n-k} \otimes \nu_{n-j}$ auf X unter der (stetigen) Abbildung

$$X \to \mathcal{S}_{n-k-j}\,, \qquad (S_1, S_2) \mapsto S_1 \cap S_2\,,$$

ist daher ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und es folgt aus seiner Definition, daß es drehinvariant ist. Nach einem elementaren Eindeutigkeitssatz für invariante Maße (vgl. etwa Schneider & Weil [42], Korollar 1.3.2) muß es daher mit ν_{n-k-j} übereinstimmen. Wir folgern nun aus dem Satz von Fubini und dem Transformationssatz

$$c_k = \int_{\mathcal{S}_{n-k-j}} \Lambda(K \cap S, A)\, d\nu_{n-k-j}(S) = \Lambda_{k+j}(K, A) \qquad (k \in \{0, \ldots, n - j\})\,.$$

Wir zeigen nun, daß das Maß $\psi(K', \cdot)$ schwach stetig von $K' \in \mathcal{K}$ abhängt. Sei also $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{K}$, und sei $K' \in \mathcal{K}$ mit $\lim_{i\to\infty} K_i = K'$. Es sei $B \subset S^n$ offen, und es sei $\rho \in SO_{n+1}$ mit der Eigenschaft, daß K und $\rho K'$ sich nicht berühren. Nach Hilfssatz 5.1.2 gilt dann $\lim_{i\to\infty} K \cap \rho K_i = K \cap \rho K'$, und wegen der schwachen Stetigkeit der assoziierten Maße folgt

$$\liminf_{i\to\infty} \Lambda_j(K \cap \rho K_i, A \cap \rho B) \geq \Lambda_j(K \cap \rho K', A \cap \rho B)\,.$$

Eine Anwendung des Lemmas von Fatou ergibt wegen $\nu(SO_{n+1}(K, K')) = 0$

$$\liminf_{i\to\infty} \psi(K_i, B) \geq \psi(K', B)\,.$$

Für $K' \in \mathcal{P}$ folgt aus Gleichung (5.9)

$$\int_{SO_{n+1}} \Lambda_j(K \cap \rho K', A)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j}^{n} \Lambda_k(K, A) V_{n+j-k}(K')$$

zunächst für offene $A \subset S^n$. Da jedoch beide Seiten Maße sind in A, gilt die Gleichung auch für beliebiges $A \in \mathcal{B}(S^n)$, und da diese Maße jeweils schwach stetig von $K' \in \mathcal{K}$ abhängen, gilt sie auch für beliebiges $K' \in \mathcal{K}$. Wegen $\lim_{i\to\infty} V_{n+j-k}(K_i) = V_{n+j-k}(K')$ ist also

$$\lim_{i\to\infty} \psi(K_i, S^n) = \psi(K', S^n)\,.$$

Damit ist $K' \mapsto \psi(K', \cdot)$ schwach stetig.

Gleichung (5.9) gilt also auch für beliebige $K' \in \mathcal{K}$. Demnach gilt

$$\int_{SO_{n+1}} \Lambda_j(K \cap \rho K', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j}^{n} \Lambda_k(K, A) \Phi_{n+j-k}(K', B)$$

für alle $K, K' \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{B}(S^n)$ und zunächst offene $A \subset S^n$, dann aber auch für beliebige $A \in \mathcal{B}(S^n)$. ■

Es ist leicht möglich, eine Version von Satz 5.3.1 anzugeben, in der K und K' Elemente des Konvexrings $\mathcal{R}$ sein können. Wir bemerken, daß sich die assoziierten Maße Λ_j wegen ihrer schwachen Stetigkeit nach Satz 2.6 in eindeutiger Weise additiv auf den Konvexring fortsetzen lassen. Wie im Beweis der kinematischen Hauptformel können nun in (5.8) nacheinander die konvexen Körper K und K' durch Elemente des Konvexrings ersetzt werden. Wir halten dieses Ergebnis in dem folgenden Satz fest:

Satz 5.3.2. *Werden die additiven Fortsetzungen der assoziierten Maße weiterhin mit* Λ_j *bezeichnet, so gilt* (5.8) *auch für Mengen* K, K' *des Konvexrings* $\mathcal{R}$.

Nun zu Beispielen für Abbildungen $\Lambda : \mathcal{K} \times \mathcal{B}(S^n) \to \mathbb{R}$, die zwar die obigen Eigenschaften (a) – (d) aufweisen, jedoch nicht notwendig drehkovariant sind. Wir benutzen dazu eine von Schneider [40] ausgeführte Konstruktion, die zu gewissen Varianten der Krümmungsmaße für konvexe Körper im euklidischen Raum führt. Wie früher bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ die Menge aller konvexen Körper in $\mathbb{R}^{n+1}$. In $\mathbb{R}^{n+1}$ sei neben der euklidischen Metrik eine Metrik d_D gegeben, deren Einheitskugel D streng konvex ist. (D ist ein zentralsymmetrischer konvexer Körper in $\mathbb{R}^{n+1}$; umgekehrt ist nach Vorgabe eines zentralsymmetrischen, streng konvexen Körpers D, der o als Symmetriezentrum besitzt, die Metrik d_D in eindeutiger Weise erklärt.) In folgender Weise werden nun für $M \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ Maße $\Xi_j^D(M, \cdot)$, $j \in \{0, \ldots, n\}$, definiert: Bezieht man die in der Definition der lokalen Parallelmenge eines konvexen

Körpers $M \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ auftretende metrische Projektionsabbildung nicht wie üblich auf die euklidische Metrik, sondern auf die Metrik d_D, so kann man – dies alles ist in [40] näher ausgeführt – eine Formel vom Steiner-Typ zeigen und durch die Koeffizienten die Maße $\Xi_j^D(M,\cdot)$, $j \in \{0,\ldots,n\}$, definieren (in [40] wurden andere Bezeichnungen gewählt). Die Maße Ξ_j^D besitzen folgende Eigenschaften: Für $M \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$ ist $\Xi_j^D(M,\cdot)$ ein auf M konzentriertes endliches Borel-Maß auf $\mathbb{R}^{n+1}$, die Abbildung $M \mapsto \Xi_j^D(M,\cdot)$ ist additiv und schwach stetig, und schließlich ist Ξ_j^D lokal erklärt. Ist D eine euklidische Kugel mit o als Zentrum, so stimmen die Maße Ξ_j^D bis auf Faktoren mit den Krümmungsmaßen für konvexe Körper in $\mathbb{R}^{n+1}$ überein; in allen anderen Fällen sind die Maße Ξ_j^D zwar translationskovariant, jedoch nicht drehkovariant. Ist nun $K \in \mathcal{K}$ ein sphärisch konvexer Körper und setzt man für $A \in \mathcal{B}(S^n)$

$$\Lambda(K,A) := \Xi_j^D(\overline{K},\tilde{A})$$

für ein $j \in \{1,\ldots,n\}$, wobei $\tilde{A} := \{\lambda x \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < \lambda < 1, x \in A\}$ ist, so erhalten wir eine Abbildung Λ, die alle in Satz 5.3.1 geforderten Eigenschaften aufweist, die jedoch nur dann drehkovariant ist, wenn D eine im Ursprung zentrierte euklidische Kugel ist. In diesem Fall stimmt das Funktional Λ bis auf einen Faktor mit dem Krümmungsmaß Φ_{j-1} überein.

Literaturhinweise zu Kapitel 5

Erste Versionen der kinematischen Hauptformel in nichteuklidischen 2- und 3-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung stammen von Blaschke ([5], S. 76 ff.) und Wu [49, 50]. Differentialgeometrische Versionen für Räume konstanter Krümmung von beliebiger Dimension hat Santaló [26, 29] behandelt. Santaló [31] leitete auch sphärische Gegenstücke für die Projektionsformeln der euklidischen Integralgeometrie ab. Als allgemeine Referenz für Integralgeometrie in nichteuklidischen Räumen konstanter Krümmung kann Teil IV des Buches von Santaló [30] dienen. Neuere Beiträge, in denen ebenfalls differentialgeometrische Methoden verwendet werden, stammen von Teufel [44], Ishihara [15] und Lee [19].

Wir gehen nun auf Beziehungen und Analogien der in diesem Kapitel gezeigten Aussagen zu Sätzen der euklidischen Integralgeometrie ein. Die kinematische Hauptformel (5.1) findet in $\mathbb{R}^n$ ihre direkte Entsprechung in Satz 3.2.3 in Schneider & Weil [42]. In [42], S. 81 ff., und in der dort zitierten Literatur findet man auch Hinweise auf die Entstehungsgeschichte verschiedener Versionen der kinematischen Hauptformel im euklidischen Raum.

Als kinematische Hauptformel werden oft auch integralgeometrische Formeln bezeichnet, bei denen als Funktional im Integranden des kinematischen Integrals die Euler-Charakteristik gewählt wird (Korollar 5.2.4). Hier ergibt sich ein wesentlicher

Unterschied zwischen Sphäre und euklidischem Raum: Während in $\mathbb{R}^n$ die Euler-Charakteristik für Mengen des Konvexrings durch das 0-te innere Volumen gegeben ist, ist sie in S^n eine Linearkombination der inneren Volumina. Diese Versionen der kinematischen Hauptformel sind daher im sphärischen und euklidischen Raum von unterschiedlicher Form. Entsprechend ist auch die Formel für das Maß der Menge aller Untersphären einer festen Dimension, die einen konvexen Körper treffen, von anderer Gestalt als ihr euklidisches Gegenstück.

Für Entsprechungen der kinematischen Formel für Krümmungsvektoren (Korollar 5.2.6) im euklidischen Raum sehe man etwa die Hinweise in [39], S. 307, Note 6.

Kinematische Formeln, in denen die konvexe Hülle der Vereinigungsmenge des ruhenden und des bewegten konvexen Körpers auftritt (Korollare 5.2.7, 5.2.8), haben im euklidischen Raum keine Entsprechung, da hier die Bewegungsgruppe nicht kompakt ist; die betreffenden Integrale sind daher nicht endlich.

Die Projektionsformeln aus Korollar 5.2.10 und Satz 5.2.11 entsprechen in $\mathbb{R}^n$ den Formeln aus [42], Satz 4.2.2, wobei die Analogie im Fall unseres Satzes 5.2.11 – dieser Fall entspricht im euklidischen Raum den Kubota-Formeln – jedoch weniger ausgeprägt ist (vgl. jedoch die Bemerkung im Anschluß an den Beweis von Satz 5.2.11).

Die Hinweise auf euklidische Analoga von Satz 5.3.1 beginnen wir mit der folgenden Problemstellung: Es sei ein stetiges, additives Funktional $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ gegeben. In Analogie zu Satz 5.3.1 könnte man dann vermuten, daß für alle konvexen Körper $K, K' \in \mathcal{K}$ die Gleichung

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \varphi(K \cap \rho K')\, d\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(K) V_{n-k}(K')$$

gilt mit den assoziierten Funktionalen

$$\varphi_k(K) := \int\limits_{\mathcal{S}_{n-k}} \varphi(K \cap S)\, d\nu_{n-k}(S)\,.$$

Ein direktes Analogon dieser Aussage für den euklidischen Raum hat Hadwiger [12, 13] gezeigt und dabei im Beweis wesentlich seinen Kennzeichnungssatz für Quermaßintegrale benutzt. Dieses Beweishilfsmittel steht aber bisher für S^n, $n \geq 3$, nicht zur Verfügung (vgl. dazu die diesbezüglichen Bemerkungen am Ende von Abschnitt 4.2), und wegen der Allgemeinheit der zugelassenen Funktionale φ erscheinen wohl andere Beweismethoden aussichtslos.

Eine direkte Entsprechung von Satz 5.3.1 für den euklidischen Raum hat Schneider [40] gezeigt. Der dort angegebene Beweis läßt sich aber, wieder in Ermangelung eines Kennzeichnungssatzes für sphärische innere Volumina, nicht direkt auf S^n übertragen. Umgekehrt kann man aber die hier verwendete Argumentation mit den nötigen Abänderungen auch im euklidischen Raum anwenden; dies soll in Abschnitt 8.2 näher ausgeführt werden.

6 Kinematische Formeln für Stützmaße

In diesem Kapitel soll zunächst auf Versionen der kinematischen Hauptformel für Stützmaße eingegangen werden. Es zeigt sich, daß es eine direkte Verallgemeinerung der kinematischen Hauptformel von Krümmungsmaßen auf Stützmaße der Mengen des Konvexrings gibt. Als Folgerung aus einem Spezialfall resultiert eine Formel, die man als sphärisches Gegenstück zu der von Schneider bewiesenen Projektionsformel für verallgemeinerte Krümmungsmaße euklidisch konvexer Körper (siehe etwa [39], Theorem 4.5.10) ansehen kann. Während also die sphärische Projektionsformel eine bekannte Entsprechung im Euklidischen besitzt, sind Schnittformeln für Stützmaße im euklidischen Raum in der Literatur bisher nicht behandelt worden. In den Abschnitten 8.3 und 8.4 wollen wir daher untersuchen, inwieweit sich die im gegenwärtigen Kapitel dargestellten Methoden auch im euklidischen Raum anwenden lassen.

6.1 Ergebnisse

Zunächst müssen wir eine Verknüpfung zwischen zwei Teilmengen von Σ definieren, die der Schnittbildung bei konvexen Körpern angepaßt ist. Die natürliche Definition einer solchen Verknüpfung scheint die folgende zu sein: Sind $\eta, \eta' \subset \Sigma$, so setzen wir

$$\begin{aligned}\eta \wedge \eta' \ := \ \big\{(x,u) \in \Sigma \ \ : \ \ & u \in [u_1, u_2] \text{ mit } u_1, u_2 \in S^n,\ u_1 \neq -u_2, \\ & (x,u_1) \in \eta,\ (x,u_2) \in \eta'\big\}\,.\end{aligned}$$

Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ konvexe Körper mit $K \cap K' \neq \emptyset$, die sich jedoch nicht berühren, so ist nach der Überlegung zu Beginn des Beweises von Hilfssatz 5.1.5 sogar relint $K \cap$ relint $K' \neq \emptyset$. Daher gilt $N(K \cap K', x) = N(K,x) \vee N(K',x)$ für alle $x \in K \cap K'$. Ist deshalb $(x,u) \in \text{Nor}\,(K \cap K')$ mit $x \in \text{bd}\,K \cap \text{bd}\,K'$, so gilt $u \in N(K,x) \vee N(K',x)$, und wegen $N(K,x) \cap -N(K',x) = \emptyset$ (dies gilt, denn andernfalls berührten sich K und K') und $N(K,x), N(K',x) \neq \emptyset$ folgt $(x,u) \in \text{Nor}\,K \wedge \text{Nor}\,K'$. Dieser Schluß läßt sich umkehren. Es gilt damit

$$\text{Nor}\,(K \cap K') \cap ((\text{bd}\,K \cap \text{bd}\,K') \times S^n) = \text{Nor}\,K \wedge \text{Nor}\,K'$$

für alle konvexen Körper $K, K' \in \mathcal{K}$, die sich nicht berühren.

Es erweist sich als notwendig, die Vervollständigungen der Stützmaße zu betrachten; wir bezeichnen diese Vervollständigungen weiter mit denselben Symbolen wie seither. Die kinematische Schnittformel für Stützmaße lautet nun wie folgt:

Satz 6.1.1. *Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor}\,K), \eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor}\,K')$. Dann gilt*

$$\int_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta')\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j+1}^{n-1} \Theta_k(K,\eta)\Theta_{n+j-k}(K',\eta')$$

für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Bemerkung: Aus Satz 6.1.1 ergibt sich eine einfache anschauliche Interpretation der Stützmaße: Ist $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, so folgt aus Satz 6.1.1

$$\Theta_j(K, \eta) = \int\limits_{\mathcal{S}_{n-j}} \Theta_0(K \cap S, (\eta \cap \operatorname{Nor} K) \wedge (S \times S^*))\, d\nu_{n-j}(S)$$

für alle $K \in \mathcal{K}$ und alle $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, und das im Integranden auftretende Funktional Θ_0 hat nach Satz 4.4.3 eine einfache geometrische Interpretation.

Bemerkung: Es liegt die Frage nahe, ob es auch eine abstrakte Version von Satz 6.1.1 gibt, d.h. können die Stützmaße im Integranden ersetzt werden durch Elemente aus einer Menge von Funktionalen, die den von $\{\Theta_0, \ldots, \Theta_{n-1}\}$ aufgespannten Vektorraum als echte Teilmenge enthält? Wir sehen zwei Schwierigkeiten, die dem Beweis eines solchen Resultats im Wege stehen. Wird die Definition der Verknüpfung „$\wedge$“ zwischen Teilmengen von Σ beibehalten, so scheint es ohne stark eingrenzende Forderungen an das betrachtete Funktional Λ schwierig zu sein, die σ-Additivität etwa der Funktion $\eta \mapsto \Lambda(K \cap \rho K', (\eta \cap \operatorname{Nor} K) \wedge \rho(\eta' \cap \operatorname{Nor} K'))$ für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ zu zeigen. Weiter ist das im Beweis von Satz 6.1.1 verwendete Approximationsverfahren unter Verwendung lokaler Parallelvolumina in dieser allgemeineren Situation offenbar nicht anwendbar.

Durch Übergang zu den Polarkörpern kann man aus Satz 6.1.1 wieder entsprechende Formeln für die konvexe Hülle der Vereinigung des ruhenden und des bewegten Körpers gewinnen. Die zugehörige Verknüpfung zwischen Teilmengen von Σ definieren wir für $\eta, \eta' \subset \Sigma$ durch

$$\begin{aligned} \eta \vee \eta' \;:=\; (\eta^{-1} \wedge \eta'^{-1})^{-1} = \big\{(x,u) \in \Sigma \;:\; & x \in [x_1, x_2] \text{ mit } x_1, x_2 \in S^n,\ x_1 \neq -x_2, \\ & (x_1, u) \in \eta,\ (x_2, u) \in \eta'\big\} \end{aligned}$$

Aus Satz 6.1.1 und Satz 4.1.2 folgt nun sofort die „duale“ kinematische Hauptformel für Stützmaße:

Satz 6.1.2. *Es seien* $K, K' \in \mathcal{K}$ *und* $\eta \in \mathcal{B}(\operatorname{Nor} K), \eta' \in \mathcal{B}(\operatorname{Nor} K')$. *Dann gilt*

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \vee \rho K', \eta \vee \rho\eta')\, d\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{j-1} \Theta_k(K, \eta)\Theta_{j-k-1}(K', \eta')$$

für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Sollen in der kinematischen Schnittformel für Stützmaße auch innere Punkte von K und K' berücksichtigt werden, so kann man etwa folgendermaßen vorgehen: Wir fassen $\Theta_j(K,\cdot)$, $j \in \{0,\dots,n-1\}$, als Maß auf $\Sigma \cup (S^n \times \{o\})$ auf und definieren zusätzlich $\Theta_n(K,\eta) := \Phi_n(K,\{x \in K : (x,o) \in \eta\})$ für $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma \cup (S^n \times \{o\}))$. Für η, $\eta' \subset \Sigma \cup (S^n \times \{o\})$ setzen wir

$$\eta \sqcap \eta' := \big((\eta \cap \Sigma) \wedge (\eta' \cap \Sigma)\big) \cup \big\{(x,u) \in \eta : (x,o) \in \eta'\big\} \cup \big\{(x,u) \in \eta' : (x,o) \in \eta\big\}\,.$$

Als Folgerung aus Satz 6.1.1 erhalten wir nun die folgende weitere Version:

Satz 6.1.3. *Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K \cup (K \times \{o\}))$, $\eta' \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K' \cup (K' \times \{o\}))$. Dann gilt*

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', \eta \sqcap \rho\eta')\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j}^{n} \Theta_k(K,\eta)\Theta_{n+j-k}(K',\eta')$$

für $j \in \{0,\dots,n\}$.

Bemerkung: Setzt man $\eta := ((A \times S^n) \cap \mathrm{Nor}\ K) \cup (A \times \{o\})$ und $\eta' := ((B \times S^n) \cap \mathrm{Nor}\ K') \cup (B \times \{o\})$ mit Mengen $A \in \mathcal{B}(K)$, $B \in \mathcal{B}(K')$, so besteht für alle $\rho \in SO_{n+1}$, für die die Körper $K, \rho K'$ sich nicht berühren, die Gleichung

$$\eta \sqcap \rho\eta' = \big(((A \cap \rho B) \times S^n) \cap \mathrm{Nor}\ (K \cap \rho K')\big) \cup \big((A \cap \rho B) \times \{o\}\big)$$

(dies folgt aus $\mathrm{Nor}\ K \wedge \mathrm{Nor}\ \rho K' = \mathrm{Nor}\ (K \cap \rho K') \cap ((\mathrm{bd}\ K \cap \mathrm{bd}\ \rho K') \times S^n)$ für diese ρ). Nach Definition der Krümmungsmaße Φ_j und wegen $\nu(SO_{n+1}(K,K')) = 0$ enthält die Formel aus Korollar 6.1.3 die Gleichung

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Phi_j(K \cap \rho K', A \cap \rho B)\, d\nu(\rho) = \sum_{k=j}^{n} \Phi_k(K,A)\Phi_{n+j-k}(K',B)\,,$$

also die kinematische Hauptformel für Krümmungsmaße konvexer Körper, als Spezialfall.

Es existieren auch Verallgemeinerungen der Sätze 6.1.1 und 6.1.3 für Mengen K, K' des Konvexrings $\mathcal{R}$. Will man solche Ergebnisse formulieren, so ist es notwendig, die Menge $\mathrm{Nor}\ K$ aller Stützelemente auch für $K \in \mathcal{R}$ zu erklären. Dies kann auf mehrere verschiedene Weisen geschehen. Wir wählen eine Definition, die ohne weiteren begrifflichen Aufwand erfolgen kann und die für unsere Zwecke ausreichend ist. Ist $K \in \mathcal{R}$ eine Menge des Konvexrings, so sei $I(K)$ die Menge aller Folgen $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ mit $K = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ und $K_i = \emptyset$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Bezeichnet weiter $S(\mathbb{N})$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von $\mathbb{N}$, so setzen wir

$$\mathrm{Nor}\ K := \bigcap_{(K_i)\in I(K)}\ \bigcup_{v\in S(\mathbb{N})} \mathrm{Nor}\left(\bigcap_{i\in v} K_i\right).$$

Für $K \in \mathcal{K}$ ist diese Festlegung offenbar konsistent mit der früheren Definition. Wir erhalten das folgende Resultat.

Satz 6.1.4. *Die Aussagen der Sätze* 6.1.1 *und* 6.1.3 *bleiben gültig, wenn* K *und* K' *durch Mengen des Konvexrings* $\mathcal{R}$ *ersetzt werden.*

Aus Satz 6.1.1 kann man kinematische Formeln ableiten, die den Projektionsformeln für verallgemeinerte Krümmungsmaße im euklidischen Raum entsprechen. Dazu zunächst noch etwas Notation: Die Projektion $K|S$ eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}$ in eine Untersphäre $S \in \mathcal{S}$ haben wir in Abschnitt 5.2 definiert als $K|S := (K \vee S^*) \cap S$. Ist $x \notin S^*$, so sei $x|S := p(S,x)$ die Projektion von x in S; im Fall $x \in S^*$ soll der Ausdruck $x|S$ undefiniert bleiben. Für $\eta \subset \Sigma$ setzen wir

$$\eta|S := \{(x|S,u) \in \Sigma : (x,u) \in \eta, x \notin S^*, u \in S\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen formulieren wir das folgende Resultat.

Satz 6.1.5. *Für* $K \in \mathcal{K}$, $q \in \{1,\ldots,n-1\}$, $j \in \{0,\ldots,q-1\}$ *und* $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$ *gilt*

$$\int_{\mathcal{S}_q} \Theta_j^{(S)}(K|S,\eta|S)\, d\nu_q(S) = \Theta_j(K,\eta),$$

wobei sich das Stützmaß $\Theta_j^{(S)}$*, wie durch den oberen Index angedeutet, auf die Untersphäre* S *bezieht.*

6.2 Beweise

Wir zeigen nun eine Reihe von Hilfssätzen, mit deren Hilfe wir Satz 6.1.1 beweisen können. Im Anschluß folgen dann die Ableitungen der Sätze 6.1.3, 6.1.4 und 6.1.5.

Wir sagen, zwei konvexe Körper $K, K' \in \mathcal{K}$ seien *in allgemeiner relativer Lage*, wenn für alle $x \in K \cap K'$ gilt

$$\mathrm{lin}\ N(K,x) \cap \mathrm{lin}\ N(K',x) = \{o\}.$$

Motiviert wird diese Bezeichnung durch den folgenden Hilfssatz, der ein wesentliches Hilfsmittel für den Beweis von Satz 6.1.1 darstellt. Dieser Hilfssatz wird unter Berufung auf ein tieferliegendes Ergebnis von Schneider über die Randstruktur euklidisch konvexer Körper abgeleitet.

Hilfssatz 6.2.1. *Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$. Dann sind für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ die Körper $K, \rho K'$ in allgemeiner relativer Lage.*

Beweis: Wie früher bezeichnen wir für beliebiges $K \in \mathcal{K}$ die konvexe Hülle von $K \cup \{o\}$ mit $\overline{K}$. Nun sei $\rho \in SO_{n+1}$ derart, daß K und $\rho K'$ nicht in allgemeiner relativer Lage sind, etwa für $x \in \text{bd}\, K \cap \text{bd}\, \rho K'$ sei G eine Gerade durch o, die in $\text{lin}\, N(K,x) \cap \text{lin}\, N(\rho K', x)$ enthalten ist. Ist $y \in G$, so existieren $u_1, u_2 \in N(K,x)$ und $v_1, v_2 \in N(\rho K', x)$ mit $y \in \text{lin}\, \{u_1, u_2\} \cap \text{lin}\, \{v_1, v_2\}$. Es gibt daher Strecken S_1, S_2, die parallel sind zu G, mit $S_1 \subset \overline{N(K,x)}$, $S_2 \subset \overline{N(\rho K', x)}$. Die Hyperebene H durch o mit Normalenvektor x ist Stützebene für die beiden euklidisch konvexen Körper $\overline{K^*}, \rho\overline{K'^*} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$, und es gilt $S_1 \subset \overline{N(K,x)} = H \cap \overline{K^*}$ und $S_2 \subset \overline{N(\rho K', x)} = H \cap \rho\overline{K'^*}$. Nach einem Ergebnis von Schneider (s. etwa [39], Corollary 2.3.11) ist die Menge aller $\rho \in SO_{n+1}$, für die $\overline{K^*}$ und $\rho\overline{K'^*}$ parallele Strecken enthalten, die zugleich in einer gemeinsamen Stützebene liegen, eine ν-Nullmenge. Es folgt die behauptete Aussage. ■

Bemerkung: Dem eben ausgeführten Beweis kann man leicht entnehmen, daß die Aussage von Hilfssatz 6.2.1 äquivalent ist zu der folgenden Behauptung: Sind $K, K' \in \mathcal{K}$, so gilt für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ das Folgende. Ist H eine $(n-1)$-Sphäre derart, daß eine der von H begrenzten abgeschlossenen Halbsphären die Körper K und $\rho K'$ enthält, und sind die Mengen $A \subset H \cap K$ und $B \subset H \cap \rho K'$ linear unabhängig, so ist auch $A \cup B$ linear unabhängig, und es gilt $A \cap B = \emptyset$. Motiviert durch Hilfssatz 6.2.1 und seine eben genannte Umformulierung werden wir in Abschnitt 8.3 zwei Vermutungen aufstellen, die Paare euklidisch konvexer Körper zum Gegenstand haben.

Für Beweiszwecke definieren wir nun noch eine weitere Verknüpfung zwischen Teilmengen von Σ. Für $\eta, \eta' \subset \Sigma$ setzen wir

$$\eta \sim \eta' \;:=\; \big\{(x,u) \in \Sigma \;:\; u \in \text{relint}\,[u_1,u_2] \text{ mit } u_1, u_2 \in S^n,\, u_1 \neq \pm u_2,\\ (x,u_1) \in \eta,\, (x,u_2) \in \eta'\big\}\,.$$

Mit Hilfssatz 6.2.1 kann man nun zeigen, daß für $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor}\, K), \eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor}\, K')$ und ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ die Mengen $\eta \wedge \rho\eta'$ und $\eta \sim \rho\eta'$ meßbar sind in bezug auf $\mu_\epsilon(K \cap \rho K', \cdot)$, das auf S. 15 definierte Maß der lokalen Parallelmenge zum Abstand ϵ, $0 < \epsilon < \pi/2$. Hilfssatz 6.2.1 spielt aber auch noch bei dem später anzuwendenden Approximationsverfahren eine wesentliche Rolle.

Im weiteren Verlauf wird oft die folgende Schlußweise verwendet: Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ in allgemeiner relativer Lage und ist $(x,u) \in \text{Nor}\, K \wedge \text{Nor}\, K'$ mit $(x,u) \notin \text{Nor}\, K \cup \text{Nor}\, K'$, so gibt es eindeutig bestimmte $u_1, u_2 \in S^n$, $u_1 \neq \pm u_2$, mit $(x,u_1) \in \text{Nor}\, K$, $(x,u_2) \in \text{Nor}\, K'$ und $u \in \text{relint}\,[u_1,u_2]$. Dies ist klar, denn wegen $\text{lin}\, N(K,x) \cap \text{lin}\, N(K',x) = \{o\}$ ist $u = v_1 + v_2$ mit eindeutig bestimmten $v_1 \in \text{pos}\, N(K,x)$, $v_2 \in \text{pos}\, N(K',x)$, $v_1, v_2 \neq o$, und es gilt $u_i = v_i/\|v_i\|$, $i = 1, 2$.

Hilfssatz 6.2.2. *Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K)$, $\eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K')$. Für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ gilt dann*

$$\eta \sim \rho\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)\,.$$

Zu $\rho \in SO_{n+1}$ gibt es eine Menge $B_\rho \in \mathcal{B}(\Sigma)$ mit $(\eta \wedge \rho\eta')\backslash(\eta \sim \rho\eta') \subset B_\rho$ derart, daß

$$\mu_\epsilon(K \cap \rho K', B_\rho) = 0$$

ist für alle ϵ, $0 < \epsilon < \pi/2$, für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$.

Beweis: Es sei $\rho \in SO_{n+1}$ derart, daß K und $\rho K'$ in allgemeiner relativer Lage sind. Ist $K \cap \rho K' = \emptyset$, so gilt $\eta \sim \rho\eta' = \emptyset$ und damit $\eta \sim \rho\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Es sei also $K \cap \rho K' \neq \emptyset$. Ist $(x,u) \in X := (\text{Nor } K \wedge \text{Nor } \rho K')\backslash(\text{Nor } K \cup \text{Nor } \rho K')$, so gibt es, wie oben ausgeführt, eindeutig bestimmte $u_1, u_2 \in S^n$, $u_1 \neq \pm u_2$, mit $(x,u_1) \in \text{Nor } K$, $(x,u_2) \in \text{Nor } \rho K'$ und $u \in \text{relint } [u_1,u_2]$. Für $i \in \{1,2\}$ setzen wir

$$\pi_i : X \to \Sigma, \quad (x,u) \mapsto (x,u_i),$$

wobei also $u_1, u_2 \in S^n$ durch $(x,u_1) \in \text{Nor } K$, $(x,u_2) \in \text{Nor } \rho K'$ und $u \in \text{relint } [u_1,u_2]$ festgelegt sind. Die Abbildungen π_1, π_2 sind stetig: Ist $(x_j,u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_{j\to\infty}(x_j,u_j) = (x,u) \in X$, für die aber $(x_j,v_j) := \pi_1(x_j,u_j)$ nicht gegen $(x,v_0) := \pi_1(x,u)$ strebt, so existiert eine aufsteigende Folge $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, so daß $(v_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen ein $v \in S^n$ mit $v \neq v_0$ konvergiert. Es sei w ein Häufungswert der Folge $(w_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$, wobei $(x_j,w_j) := \pi_2(x_j,u_j)$ ist. Wegen $(x,v) \in \text{Nor } K$, $(x,w) \in \text{Nor } \rho K'$ gilt $v \neq \pm w$ und $u \in \text{relint } [v,w]$, also $\pi_1(x,u) = (x,v) \neq (x,v_0) = \pi_1(x,u)$. Dieser Widerspruch zeigt die Stetigkeit von π_1, und die Stetigkeit von π_2 ergibt sich analog.

Es gilt $\eta \sim \rho\eta' = \pi_1^{-1}(\eta) \cap \pi_2^{-1}(\rho\eta')$: Ist $(x,u) \in \eta \sim \rho\eta'$, so existieren $u_1, u_2 \in S^n$, $u_1 \neq \pm u_2$, mit $(x,u_1) \in \eta, (x,u_2) \in \rho\eta'$ und $u \in \text{relint } [u_1,u_2]$. Da $K, \rho K'$ in allgemeiner relativer Lage sind, ist $(x,u) \notin \text{Nor } K \cup \text{Nor } \rho K'$. Daher ist $(x,u) \in \pi_1^{-1}(\eta) \cap \pi_2^{-1}(\rho\eta')$. Ist umgekehrt $(x,u) \in \pi_1^{-1}(\eta) \cap \pi_2^{-1}(\rho\eta')$, so existieren einerseits $v_1, v_2 \in S^n$, $v_1 \neq \pm v_2$, mit $(x,v_1) \in \eta$, $(x,v_2) \in \text{Nor } \rho K'$ und $u \in \text{relint } [v_1,v_2]$, andererseits $w_1, w_2 \in S^n$, $w_1 \neq \pm w_2$, mit $(x,w_1) \in \text{Nor } K$, $(x,w_2) \in \rho\eta'$ und $u \in \text{relint } [w_1,w_2]$. Wegen $\text{lin } N(K,x) \cap \text{lin } N(\rho K',x) = \{o\}$ folgt $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$ und damit $(x,u) \in \eta \sim \rho\eta'$.

Nun folgt also $\eta \sim \rho\eta' \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(\Sigma)$ wegen $X \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Nach Hilfssatz 6.2.1 ist daher $\eta \sim \rho\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$.

Jetzt sei $\rho \in SO_{n+1}$ beliebig. Mit

$$B_\rho := (\text{Nor } K \cup \text{Nor } \rho K') \cap ((\text{bd } K \cap \text{bd } \rho K') \times S^n) \in \mathcal{B}(\Sigma)$$

gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}(\eta \wedge \rho\eta')\backslash(\eta \sim \rho\eta') \quad &\subset \quad \{(x,u) \in \eta : (x,v) \in \rho\eta' \text{ für ein } v \in S^n\} \\ &\qquad \cup \{(x,u) \in \rho\eta' : (x,v) \in \eta \text{ für ein } v \in S^n\} \\ &\subset \quad B_\rho\,.\end{aligned}$$

Ferner gilt

$M_\epsilon(K \cap \rho K', B_\rho) = M_\epsilon(K, (\mathrm{bd}\ K \cap \mathrm{bd}\ \rho K') \times S^n) \cup M_\epsilon(\rho K', (\mathrm{bd}\ K \cap \mathrm{bd}\ \rho K') \times S^n)$

für $0 < \epsilon < \pi/2$ (lokale Parallelmengen hatten wir auf S. 15 definiert). Nach der lokalen Steiner-Formel (3.1) und der Definition der Krümmungsmaße Φ_i gilt daher

$$\begin{aligned}\mu_\epsilon(K \cap \rho K', B_\rho) & \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \beta_{n-i-1} \big(\Phi_i(K, \mathrm{bd}\ K \cap \mathrm{bd}\ \rho K') + \Phi_i(\rho K', \mathrm{bd}\ K \cap \mathrm{bd}\ \rho K')\big) \\ &\qquad \times \int_0^\epsilon \cos^i t \sin^{n-i-1} t \, dt \,.\end{aligned}$$

Nach der kinematischen Hauptformel für Krümmungsmaße gilt für $i \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned}\int_{SO_{n+1}} \Phi_i(K, \mathrm{bd}\ K \cap \mathrm{bd}\ \rho K') \, d\nu(\rho) &= \int_{SO_{n+1}} \Phi_i(K \cap \rho S^n, \mathrm{bd}\ K \cap \mathrm{bd}\ \rho K') \, d\nu(\rho) \\ &= \sum_{k=i}^{n} \Phi_k(K, \mathrm{bd}\ K) \Phi_{n+i-k}(S^n, \mathrm{bd}\ K') \\ &= V_i(K) \lambda^n(\mathrm{bd}\ K')/\beta_n = 0\end{aligned}$$

und analog $\int_{SO_{n+1}} \Phi_i(\rho K', \mathrm{bd}\ K \cap \mathrm{bd}\ \rho K') \, d\nu(\rho) = V_i(K') \lambda^n(\mathrm{bd}\ K)/\beta_n = 0$. Daher gilt

$$\int_{SO_{n+1}} \mu_\epsilon(K \cap \rho K', B_\rho) \, d\nu(\rho) = 0 \,,$$

und es folgt die Behauptung. ■

Nach dem eben gezeigten Hilfssatz liegt also unter den obigen Voraussetzungen $\eta \wedge \rho\eta'$ für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ im Definitionsbereich der Vervollständigung des Maßes $\mu_\epsilon(K \cap \rho K', \cdot)$; diese Vervollständigung bezeichnen wir weiterhin mit demselben Symbol. Ferner gilt für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$

$$\mu_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta') = \mu_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \sim \rho\eta') \,.$$

Hilfssatz 6.2.3. *Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$, $\eta' \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K')$ und $0 < \epsilon < \pi/2$. Dann ist für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ die Abbildung*

$$\mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K) \to \mathbb{R} \,, \qquad \eta \mapsto \mu_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta') \,,$$

ein endliches Maß. Ist $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$, so ist für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ die Abbildung

$$\mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K') \to \mathbb{R}, \qquad \eta' \mapsto \mu_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta') \,,$$

ein endliches Maß.

Beweis: Es sei $\rho \in SO_{n+1}$ derart, daß K und $\rho K'$ in allgemeiner relativer Lage sind. Sei $x \in \mathrm{bd}\ K \cap \mathrm{bd}\ \rho K'$. Wegen $\mathrm{lin}\ N(K,x) \cap \mathrm{lin}\ N(\rho K', x) = \{o\}$ gilt daher für alle $A, B \subset N(K,x)$ mit $A \cap B = \emptyset$ und alle $C \subset N(\rho K', x)$

$$\big((\{x\} \times A) \sim (\{x\} \times C)\big) \cap \big((\{x\} \times B) \sim (\{x\} \times C)\big) = \emptyset\,.$$

Daraus folgt allgemein für $\eta_1, \eta_2 \subset \mathrm{Nor}\ K, \eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$, und $\eta' \subset \mathrm{Nor}\ K'$

$$(\eta_1 \sim \rho\eta') \cap (\eta_2 \sim \rho\eta') = \emptyset\,.$$

Da $\mu_\epsilon(K \cap \rho K', \cdot)$ ein endliches Maß ist, folgt nun die erste Aussage des Hilfssatzes aus den Hilfssätzen 6.2.1 und 6.2.2, und die zweite ergibt sich analog. ■

Hilfssatz 6.2.4. *Sind $K, K' \in \mathcal{K}$ und ist $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{K}$ mit $\lim_{i\to\infty} K_i = K$, so gilt für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$*

$$\liminf_{i\to\infty} \mu_\epsilon\big(K_i \cap \rho K', (\eta \cap \mathrm{Nor}\ K_i) \wedge \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K')\big) \\ \geq \mu_\epsilon\big(K \cap \rho K', (\eta \cap \mathrm{Nor}\ K) \wedge \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K')\big)$$

für alle offenen $\eta, \eta' \subset \Sigma$ und

$$\lim_{i\to\infty} \mu_\epsilon\big(K_i \cap \rho K', \mathrm{Nor}\ K_i \wedge \mathrm{Nor}\ \rho K'\big) = \mu_\epsilon\big(K \cap \rho K', \mathrm{Nor}\ K \wedge \mathrm{Nor}\ \rho K'\big)\,,$$

jeweils für alle ϵ mit $0 < \epsilon < \pi/2$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die behauptete Ungleichung. Für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ sind sowohl $K, \rho K'$ als auch $K_i, \rho K'$ für alle $i \in \mathbb{N}$ in allgemeiner relativer Lage. Im folgenden sei ein beliebiges ρ mit dieser Eigenschaft gewählt. Ist $K \cap \rho K' = \emptyset$, so ist die Behauptung trivial. Sei also $K \cap \rho K' \neq \emptyset$. Die Körper $K, \rho K'$ berühren sich nicht (sonst wären sie nicht in allgemeiner relativer Lage), daher gilt $\lim_{i\to\infty}(K_i \cap \rho K') = K \cap \rho K'$ nach Hilfssatz 5.1.2. Wir zeigen die Inklusion

$$M_\epsilon\big(K \cap \rho K', (\eta \cap \mathrm{Nor}\ K) \sim \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K')\big) \setminus \mathrm{bd}\ (K \cap \rho K')_\epsilon \\ \subset \liminf_{i\to\infty} M_\epsilon\big(K_i \cap \rho K', (\eta \cap \mathrm{Nor}\ K_i) \sim \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K')\big)$$

(nach dem Beweis von Hilfssatz 6.2.2 sind $(\eta \cap \mathrm{Nor}\ K) \sim \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K')$ und $(\eta \cap \mathrm{Nor}\ K_i) \sim \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K')$ Borel-Mengen).

Sei also $x \in M_\epsilon\,(K \cap \rho K', (\eta \cap \mathrm{Nor}\ K) \sim \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K'))$ mit $d(K \cap \rho K', x) < \epsilon$. Für fast alle $i \in \mathbb{N}$ ist $0 < d(K_i \cap \rho K', x) < \epsilon$. Für diese i definieren wir $u_i := u(K_i \cap \rho K', x)$, $p_i := p(K_i \cap \rho K', x)$, ferner setzen wir $u := u(K \cap \rho K', x)$, $p := p(K \cap \rho K', x)$. Es gilt $u_i \to u$, $p_i \to p$ für $i \to \infty$. Da K und $\rho K'$ in allgemeiner relativer Lage sind, existieren eindeutig bestimmte $v, w \in S^n$, $v \neq \pm w$, mit $(p, v) \in \eta \cap \mathrm{Nor}\ K$,

$(p,w) \in \rho(\eta' \cap \text{Nor } K')$ und $u \in \text{relint } [v,w]$. Es gilt $p_i \in \text{bd } K_i \cap \text{bd } \rho K'$ für fast alle i, denn andernfalls hätte man $(p_i,u_i) \in \text{Nor } K_i \cup \text{Nor } \rho K'$ für unendlich viele i und damit $(p,u) \in \text{Nor } K \cup \text{Nor } \rho K'$, also $u \in \{v,w\}$. Da sich K_i und $\rho K'$ nicht berühren, ist $(p_i,u_i) \in \text{Nor } (K_i \cap \rho K') \cap ((\text{bd } K_i \cap \text{bd } \rho K') \times S^n) = \text{Nor } K_i \wedge \text{Nor } \rho K'$ für fast alle i, für diese i existieren daher $v_i, w_i \in S^n$ mit $(p_i,v_i) \in \text{Nor } K_i$, $(p_i,w_i) \in \text{Nor } \rho K'$ und $u_i \in [v_i,w_i]$ (es gilt $v_i \neq \pm w_i$ nach Wahl von ρ). Für fast alle i ist sogar $u_i \in \text{relint } [v_i,w_i]$, denn andernfalls wäre wiederum $u \in \{v,w\}$. Da K, $\rho K'$ in allgemeiner relativer Lage sind, sieht man nun in Analogie zur Stetigkeit der im Beweis von Hilfssatz 6.2.2 definierten Abbildungen π_1, π_2 die Limesbeziehungen $v_i \to v$, $w_i \to w$ für $i \to \infty$ ein. Wegen $(p,v) \in \eta$, $(p,w) \in \rho\eta'$ und da die Mengen $\eta, \rho\eta' \subset \Sigma$ offen sind, ist $(p_i,v_i) \in \eta$, $(p_i,w_i) \in \rho\eta'$ für fast alle i, also wie behauptet

$$x \in \liminf_{i\to\infty} M_\epsilon(K_i \cap \rho K', (\eta \cap \text{Nor } K_i) \sim \rho(\eta' \cap \text{Nor } K'))\,.$$

Wegen $\lambda^n(\text{bd } (K \cap \rho K')_\epsilon) = 0$ (vgl. Aussage (3.3) auf S. 19) folgt

$$\begin{aligned}
&\mu_\epsilon\big(K \cap \rho K', (\eta \cap \text{Nor } K) \sim \rho(\eta' \cap \text{Nor } K')\big) \\
&\qquad = \lambda^n\big(M_\epsilon(K \cap \rho K', (\eta \cap \text{Nor } K) \sim \rho(\eta' \cap \text{Nor } K'))\backslash \text{bd } (K \cap \rho K')_\epsilon\big) \\
&\qquad \leq \lambda^n\big(\liminf_{i\to\infty} M_\epsilon(K_i \cap \rho K', (\eta \cap \text{Nor } K_i) \sim \rho(\eta' \cap \text{Nor } K'))\big) \\
&\qquad \leq \liminf_{i\to\infty} \mu_\epsilon\big(K_i \cap \rho K', (\eta \cap \text{Nor } K_i) \sim \rho(\eta' \cap \text{Nor } K')\big)
\end{aligned}$$

für ν-fast alle ρ, und nach Hilfssatz 6.2.2 besitzt die Menge aller $\rho \in SO_{n+1}$, für die

$$\begin{aligned}
&\mu_\epsilon\big(K \cap \rho K', (\eta \cap \text{Nor } K) \wedge \rho(\eta' \cap \text{Nor } K')\big) \\
&\qquad = \mu_\epsilon\big(K \cap \rho K', (\eta \cap \text{Nor } K) \sim \rho(\eta' \cap \text{Nor } K')\big)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\mu_\epsilon\big(K_i \cap \rho K', (\eta \cap \text{Nor } K_i) \wedge \rho(\eta' \cap \text{Nor } K')\big) \\
&\qquad = \mu_\epsilon\big(K_i \cap \rho K', (\eta \cap \text{Nor } K_i) \sim \rho(\eta' \cap \text{Nor } K')\big)
\end{aligned}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, eine Teilmenge vom Maß 1. Die behauptete Ungleichung ist daher gezeigt.

Für alle $\rho \in SO_{n+1}$, für die K und $\rho K'$ sich nicht berühren, gilt

$$\begin{aligned}
\limsup_{i\to\infty} M_\epsilon(K_i \cap \rho K', \text{Nor } K_i \wedge \text{Nor } \rho K') \;\subset\; & M_\epsilon(K \cap \rho K', \text{Nor } K \wedge \text{Nor } \rho K') \\
& \cup \text{bd } (K \cap \rho K')\,.
\end{aligned}$$

Um dies zu zeigen, sei $\rho \in SO_{n+1}\backslash SO_{n+1}(K,K')$ und $x \in \limsup_{i\to\infty} M_\epsilon(K_i \cap \rho K', \text{Nor } K_i \wedge \text{Nor } \rho K')$. Es gilt $\lim_{i\to\infty}(K_i \cap \rho K') = K \cap \rho K'$. Es existiert eine aufsteigende Folge $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $0 < d(K_{i_j} \cap \rho K', x) \leq \epsilon$ und $(p_j, u_j) :=$

$(p(K_{i_j} \cap \rho K', x), u(K_{i_j} \cap \rho K', x)) \in \text{Nor } K_{i_j} \wedge \text{Nor } \rho K'$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es existieren $v_j, w_j \in S^n$, $v_j \neq -w_j$, mit $(p_j, v_j) \in \text{Nor } K_{i_j}$, $(p_j, w_j) \in \text{Nor } \rho K'$ und $u_j \in [v_j, w_j]$. Wir nehmen nun $x \notin \text{bd } (K \cap \rho K')$ an. Dann gilt $0 < d(K \cap \rho K', x) \leq \epsilon$ und $\lim_{j\to\infty}(p_j, u_j) = (p, u) := (p(K \cap \rho K', x), u(K \cap \rho K', x))$. Ist $v \in S^n$ Grenzwert einer konvergenten Teilfolge $(v_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und ist $w \in S^n$ ein Häufungswert der Folge $(w_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so gilt $(p, v) \in \text{Nor } K$, $(p, w) \in \text{Nor } \rho K'$, $v \neq -w$ (andernfalls berührten sich K und $\rho K'$) und $u \in [v, w]$. Damit gilt $(p, u) \in \text{Nor } K \wedge \text{Nor } \rho K'$ und daher $x \in M_\epsilon(K \cap \rho K', \text{Nor } K \wedge \text{Nor } \rho K')$. Die behauptete Inklusion ist daher gezeigt. Aus ihr folgt wegen $\lambda^n(\text{bd } (K \cap \rho K')) = 0$ einerseits

$$\begin{aligned}
&\limsup_{i\to\infty} \mu_\epsilon(K_i \cap \rho K', \text{Nor } K_i \wedge \text{Nor } \rho K') \\
&\qquad = \limsup_{i\to\infty} \lambda^n\big(M_\epsilon(K_i \cap \rho K', \text{Nor } K_i \wedge \text{Nor } \rho K')\big) \\
&\qquad \leq \lambda^n\big(\limsup_{i\to\infty} M_\epsilon(K_i \cap \rho K', \text{Nor } K_i \wedge \text{Nor } \rho K')\big) \\
&\qquad \leq \lambda^n\big(M_\epsilon(K \cap \rho K', \text{Nor } K \wedge \text{Nor } \rho K')\big) \\
&\qquad = \mu_\epsilon(K \cap \rho K', \text{Nor } K \wedge \text{Nor } \rho K')
\end{aligned}$$

für alle $\rho \in SO_{n+1} \backslash SO_{n+1}(K, K')$. Aus der im ersten Teil des Beweises gezeigten Ungleichung folgt andererseits insbesondere

$$\mu_\epsilon(K \cap \rho K', \text{Nor } K \wedge \text{Nor } \rho K') \leq \liminf_{i\to\infty} \mu_\epsilon(K_i \cap \rho K', \text{Nor } K_i \wedge \text{Nor } \rho K')$$

für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$. Nun ist auch die zweite Behauptung von Hilfssatz 6.2.4 klar. ■

Hilfssatz 6.2.5. *Für alle $K, K' \in \mathcal{K}$, $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K), \eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K')$ und für $0 < \epsilon < \pi/2$ stimmt die Abbildung $SO_{n+1} \to \mathbb{R}$, $\rho \mapsto \mu_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta')$, ν-fast überall mit einer meßbaren Abbildung überein.*

Beweis: Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$, es sei $\rho \in SO_{n+1}$ derart, daß K und $\rho K'$ in allgemeiner relativer Lage sind, und es sei $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine gegen ρ konvergente Folge in SO_{n+1} mit der Eigenschaft, daß K und $\rho_i K'$ in allgemeiner relativer Lage sind für alle $i \in \mathbb{N}$. Sind $\eta \subset \text{Nor } K$ und $\eta' \subset \text{Nor } K'$ offene Teilmengen, so sieht man wie im ersten Teil des Beweises von Hilfssatz 6.2.4 für $0 < \epsilon < \pi/2$ die Inklusion

$$M_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \sim \rho\eta') \backslash \text{bd } (K \cap \rho K')_\epsilon \subset \liminf_{i\to\infty} M_\epsilon(K \cap \rho_i K, \eta \sim \rho_i \eta')$$

ein. Es folgt

$$\mu_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \sim \rho\eta') \leq \liminf_{i\to\infty} \mu_\epsilon(K \cap \rho_i K', \eta \sim \rho_i \eta')\,.$$

Aus den Hilfssätzen 6.2.1 und 6.2.2 folgt nun, daß die Abbildung $\rho \mapsto \mu_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta')$ für offene $\eta \subset \mathrm{Nor}\ K$ und $\eta' \subset \mathrm{Nor}\ K'$ auf einer Teilmenge von SO_{n+1} vom Maß 1 wohldefiniert ist und auf dieser Teilmenge halbstetig nach unten ist. Für solche η, η' ist daher die behauptete Aussage richtig. Für offenes $\eta' \subset \mathrm{Nor}\ K'$ zeigt man leicht unter Verwendung von Hilfssatz 6.2.3, daß die Menge aller $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$, für die die behauptete Aussage richtig ist, ein Dynkin-System darstellt. Daraus folgt die Behauptung für $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$ und offenes $\eta' \subset \mathrm{Nor}\ K'$. In einem zweiten Schritt kann man analog die allgemeine Behauptung zeigen. ∎

Hilfssatz 6.2.6. *Sind* $K, K' \in \mathcal{K}$, $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K), \eta' \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K')$ *und ist* $0 < \epsilon < \pi/2$, *so existieren nur von* ϵ *abhängige Konstanten* $a_{kl} \in \mathbb{R}$, $k, l \in \{0, \ldots, n-1\}$, *mit*

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \mu_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta')\, d\nu(\rho) = \sum_{k,l=0}^{n-1} a_{kl} \Theta_k(K, \eta) \Theta_l(K', \eta')\,.$$

Beweis: Wir zeigen die Gleichung zunächst für Polytope und dehnen ihre Gültigkeit dann mit Hilfe einer Version eines von Schneider [37] bewiesenen Approximationssatzes, die wir im Anschluß in geeigneter Fassung zitieren, auf allgemeine konvexe Körper aus. Es sei $P \in \mathcal{P}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Die (nach Hilfssatz 6.2.5 wohldefinierte) Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{P} \times \mathcal{B}(\Sigma) &\to \mathbb{R} \\ (P', \eta') &\mapsto \int\limits_{SO_{n+1}} \mu_\epsilon\big(P \cap \rho P', (\eta \cap \mathrm{Nor}\ P) \wedge \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ P')\big)\, d\nu(\rho) \end{aligned}$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 4.2.1 über die Charakterisierung von Linearkombinationen von Stützmaßen: Aus Hilfssatz 6.2.3 und dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt, daß für alle P' die Abbildung $\psi(P', \cdot)$ ein auf $\mathrm{Nor}\ P'$ konzentriertes, endliches Maß ist. Aus der Linksinvarianz von ν folgt $\psi(\rho P', \rho\eta') = \psi(P', \eta')$ für alle $P' \in \mathcal{P}$, $\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Sind $P_1', P_2' \in \mathcal{P}$ und ist $\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ mit $\eta' \cap \mathrm{Nor}\ P_1' = \eta' \cap \mathrm{Nor}\ P_2'$, so ist

$$\begin{aligned} &[(\eta \cap \mathrm{Nor}\ P) \wedge \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ P_1')] \cap \mathrm{Nor}\ (P \cap \rho P_1') \\ &\quad = [(\eta \cap \mathrm{Nor}\ P) \wedge \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ P_1')] \cap \mathrm{Nor}\ (P \cap \rho P_2') \\ &\quad = [(\eta \cap \mathrm{Nor}\ P) \wedge \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ P_2')] \cap \mathrm{Nor}\ (P \cap \rho P_2') \end{aligned}$$

für alle $\rho \in SO_{n+1}$, und da μ_ϵ nach Satz 4.1.1 lokal erklärt ist, folgt $\psi(P_1', \eta') = \psi(P_2', \eta')$. Daher existieren Konstanten $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$, die nur von ϵ, P und η abhängen, mit

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \mu_\epsilon\big(P \cap \rho P', (\eta \cap \mathrm{Nor}\ P) \wedge \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ P')\big)\, d\nu(\rho) = \sum_{l=0}^{n-1} c_l \Theta_l(P', \eta')\,.$$

Wählt man für P' speziell l-dimensionale Untersphären, $l \in \{0, \dots, n-1\}$, und $\eta' = \Sigma$, so kann man Satz 4.2.1 erneut anwenden und so für die Konstanten

$$c_l = \sum_{k=0}^{n-1} a_{kl} \Theta_k(P, \eta)$$

mit gewissen nur von ϵ abhängigen $a_{kl} \in \mathbb{R}$ zeigen. Die behauptete Aussage gilt also für Polytope.

Das Funktional $\varphi : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \mathcal{B}(\Sigma) \times \mathcal{B}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(K, K', \eta, \eta') = \int_{SO_{n+1}} \mu_\epsilon\big(K \cap \rho K', (\eta \cap \mathrm{Nor}\ K) \wedge \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K')\big)\, d\nu(\rho)$$

erfüllt die Voraussetzungen des nachfolgenden Approximationssatzes (Hilfssatz 6.2.7): Voraussetzungen (a) und (b) folgen aus Hilfssatz 6.2.3 und dem Satz von der monotonen Konvergenz, (c) folgt aus Hilfssatz 6.2.4, dem Lemma von Fatou und dem Satz von der majorisierten Konvergenz, (d) folgt aus (c), Satz 4.1.1 und der Linksinvarianz von ν, (e) gilt nach den eben angestellten Überlegungen. Die behauptete Gleichung gilt also für beliebige $K, K' \in \mathcal{K}$. ■

Hilfssatz 6.2.7. *Sei $\varphi : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \mathcal{B}(\Sigma) \times \mathcal{B}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *für jede Wahl von $K, K' \in \mathcal{K}$, $\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ ist $\varphi(K, K', \cdot, \eta')$ ein endliches Maß;*

(b) *für jede Wahl von $K, K' \in \mathcal{K}$, $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ ist $\varphi(K, K', \eta, \cdot)$ ein endliches Maß;*

(c) *ist $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{K}$ mit $\lim_{i\to\infty} K_i = K$, so gilt für jede Wahl von $K' \in \mathcal{K}$*

$$\liminf_{i\to\infty} \varphi(K_i, K', \eta, \eta') \geq \varphi(K, K', \eta, \eta')$$

für alle offenen $\eta, \eta' \subset \Sigma$ und

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(K_i, K', \Sigma, \Sigma) = \varphi(K, K', \Sigma, \Sigma)\,;$$

(d) *wie* (c)*, nur mit vertauschten Rollen von K und K';*

(e) *mit gewissen Konstanten $a_{kl} \in \mathbb{R}$ gilt für alle $P, P' \in \mathcal{P}$ die Gleichung*

$$\varphi(P, P', \eta, \eta') = \sum_{k,l=0}^{n-1} a_{kl} \Theta_k(P, \eta) \Theta_l(P', \eta') \tag{6.1}$$

für alle $\eta, \eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$.

Dann gilt (6.1) *auch für beliebige* $K, K' \in \mathcal{K}$.

Beweis: Der Beweis von Lemma (1.3) in Schneider [37] läßt sich durch offensichtliche Abänderungen auf die Situation von Hilfssatz 6.2.7 übertragen. ■

Beweis von Satz 6.1.1*:* Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K)$, $\eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K')$. Ist $0 < \epsilon < \pi/2$, so existieren nach Hilfssatz 6.2.6 Konstanten $a_{kl} \in \mathbb{R}$, die nur von ϵ abhängen, mit

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \mu_\epsilon(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta')\, d\nu(\rho) = \sum_{k,l=0}^{n-1} a_{kl}\Theta_k(K,\eta)\Theta_l(K',\eta')\,.$$

Wegen Gleichung (3.5), S. 21, und Hilfssatz 6.2.2 ist für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ die Menge $\eta \wedge \rho\eta'$ im Definitionsbereich der Vervollständigung von $\Theta_j(K \cap \rho K', \cdot)$, $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, enthalten, und es gilt

$$\Theta_j(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta') = \sum_{k=0}^{n-1} b_{jk}\mu_{\epsilon_k}(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta')$$

mit gewissen Konstanten $b_{jk} \in \mathbb{R}$ und ϵ_k, $0 < \epsilon_k < \pi/2$. Mit gewissen Konstanten $c_{jkl} \in \mathbb{R}$ erhalten wir die Gleichung

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta')\, d\nu(\rho) = \sum_{k,l=0}^{n-1} c_{jkl}\Theta_k(K,\eta)\Theta_l(K',\eta')$$

für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Wählt man speziell $K, K' \in \mathcal{S}$ und $\eta = \text{Nor } K$, $\eta' = \text{Nor } K'$, so erhält man mittels Hilfssatz 5.1.3 für die Konstanten $c_{jkl} = 1$, falls $l = n + j - k$ und $k \geq j + 1$, und in allen anderen Fällen $c_{jkl} = 0$. ■

Beweis von Satz 6.1.3*:* Sei $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K \cup (K \times \{o\}))$, $\eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K' \cup (K' \times \{o\}))$. Zu $\rho \in SO_{n+1}$ setzen wir

$$\begin{aligned} A_\rho(\eta,\eta') &:= \{(x,u) \in \eta : (x,o) \in \rho\eta'\}\,, \\ B_\rho(\eta,\eta') &:= \{(x,u) \in \rho\eta' : (x,o) \in \eta\}\,. \end{aligned}$$

Sei $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Es gilt $\text{Nor } K \cap (A_\rho(\eta,\eta') \cap \Sigma) = \text{Nor } (K \cap \rho K') \cap (A_\rho(\eta,\eta') \cap \Sigma)$, also wegen Satz 4.1.1 (c)

$$\begin{aligned} \Theta_j(K \cap \rho K', A_\rho(\eta,\eta')) &= \Theta_j(K \cap \rho K', A_\rho(\eta,\eta') \cap \Sigma) \\ &= \Theta_j(K, A_\rho(\eta,\eta') \cap \Sigma) = \Theta_j(K, A_\rho(\eta,\eta')) \end{aligned}$$

und damit nach Definition der Menge $A_\rho(\eta,\eta')$

$$\begin{aligned}\int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K\cap\rho K', A_\rho(\eta,\eta'))\,d\nu(\rho) &= \int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K, A_\rho(\eta,\eta'))\,d\nu(\rho)\\ &= \int\limits_{SO_{n+1}}\int\limits_{\Sigma} \mathbf{1}_\eta(x,u)\mathbf{1}_{\rho\eta'}(x,o)\,d\Theta_j(K,(x,u))d\nu(\rho)\\ &= \int\limits_{\Sigma} \mathbf{1}_\eta(x,u) \int\limits_{SO_{n+1}} \mathbf{1}_{\rho\eta'}(x,o)\,d\nu(\rho)\,d\Theta_j(K,(x,u))\\ &= \Theta_j(K,\eta)\,\lambda^n(\{x\in K' : (x,o)\in\eta'\})/\beta_n\\ &= \Theta_j(K,\eta)\,\Theta_n(K',\eta')\,,\end{aligned}$$

wobei wir die für beliebiges $A\in\mathcal{B}(S^n)$ und $x\in S^n$ gültige Beziehung

$$\lambda^n(A) = \beta_n \int\limits_{SO_{n+1}} \mathbf{1}_{\rho A}(x)\,d\nu(\rho)$$

verwendet haben (vgl. etwa Schneider & Weil [42], Korollar 1.3.2). Analog ist

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K\cap\rho K', B_\rho(\eta,\eta'))\,d\nu(\rho) = \Theta_n(K,\eta)\,\Theta_j(K',\eta')$$

und

$$\int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_n(K\cap\rho K', \eta\sqcap\rho\eta')\,d\nu(\rho) = \Theta_n(K,\eta)\,\Theta_n(K',\eta')$$

(dies ist die Behauptung für $j=n$). Nach Hilfssatz 6.2.2 und Satz 6.1.1 gilt

$$\begin{aligned}&\int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K\cap\rho K', (\eta\cap\Sigma)\sim\rho(\eta'\cap\Sigma))\,d\nu(\rho)\\ &\qquad= \int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K\cap\rho K', (\eta\cap\Sigma)\wedge\rho(\eta'\cap\Sigma))\,d\nu(\rho)\\ &\qquad= \sum_{k=j+1}^{n-1} \Theta_k(K,\eta)\Theta_{n+j-k}(K',\eta')\,.\end{aligned}$$

Ferner gilt stets

$$\begin{aligned}&\Big((\eta\cap\Sigma)\sim\rho(\eta'\cap\Sigma)\Big)\cup\Big(A_\rho(\eta,\eta')\cap\Sigma\Big)\cup\Big(B_\rho(\eta,\eta')\cap\Sigma\Big)\\ &\qquad\subset\ \eta\sqcap\rho\eta' \ =\ \Big((\eta\cap\Sigma)\wedge\rho(\eta'\cap\Sigma)\Big)\cup A_\rho(\eta,\eta')\cup B_\rho(\eta,\eta')\,,\end{aligned}$$

und die linksstehende Vereinigung ist disjunkt, falls K und $\rho K'$ in allgemeiner relativer Lage sind. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=j}^{n} \Theta_k(K,\eta)\Theta_{n+j-k}(K',\eta') \\
&= \int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', (\eta \cap \Sigma) \sim \rho(\eta' \cap \Sigma))\, d\nu(\rho) \\
&\qquad + \int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', A_\rho(\eta,\eta'))\, d\nu(\rho) + \int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', B_\rho(\eta,\eta'))\, d\nu(\rho) \\
&\leq \int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', \eta \sqcap \rho\eta')\, d\nu(\rho) \\
&\leq \int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', (\eta \cap \Sigma) \wedge \rho(\eta' \cap \Sigma))\, d\nu(\rho) \\
&\qquad + \int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', A_\rho(\eta,\eta'))\, d\nu(\rho) + \int\limits_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', B_\rho(\eta,\eta'))\, d\nu(\rho) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \Theta_k(K,\eta)\Theta_{n+j-k}(K',\eta')\,,
\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. ∎

Um die Ausdehnungen auf den Konvexring vornehmen zu können, benötigen wir den nächsten Hilfssatz. Wie früher verwenden wir die folgende Notation: Ist $K \in \mathcal{R}$ dargestellt als Vereinigung der konvexen Körper $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}$, so sei $K_v := \cap_{i \in v} K_i$ für alle $v \in S(m) = \{M \subset \{1, \ldots, m\} : M \neq \emptyset\}$.

Hilfssatz 6.2.8. *Es seien $K, K' \in \mathcal{R}$, und es seien $K_1, \ldots, K_m$, $K'_1, \ldots, K'_{m'} \in \mathcal{K}$ mit $K = \cup_{i=1}^m K_i$, $K' = \cup_{i=1}^{m'} K'_i$. Weiter seien $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$ und $\eta' \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K')$. Für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ gilt dann*

$$\Theta_j(K_v \cap \rho K'_{v'}, \eta \wedge \rho\eta') = \Theta_j(K_v \cap \rho K'_{v'}, (\eta \cap \mathrm{Nor}\ K_v) \wedge \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K'_{v'}))$$

für alle $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ und alle $v \in S(m)$, $v' \in S(m')$.

Beweis: Es seien $v \in S(m)$, $v' \in S(m')$. Für $\rho \in SO_{n+1}$ setzen wir

$$B_\rho := (\mathrm{Nor}\ K_v \cup \mathrm{Nor}\ \rho K'_{v'}) \cap ((\mathrm{bd}\ K_v \cap \mathrm{bd}\ \rho K'_{v'}) \times S^n)\,.$$

Nach dem Beweis von Hilfssatz 6.2.2 gilt $\mu_\epsilon(K_v \cap \rho K'_{v'}, B_\rho) = 0$ für alle ϵ, $0 < \epsilon < \pi/2$, für ν-fast alle $\rho \in SO_{n+1}$ und damit

$$\Theta_j(K_v \cap \rho K'_{v'}, B_\rho) = 0$$

für alle $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ für ν-fast alle ρ. Es seien nun $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K)$ und $\eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K')$. Es gilt

$$(\eta \cap \text{Nor } K_v) \wedge \rho(\eta' \cap \text{Nor } K'_{v'}) \ \subset \ (\eta \wedge \rho\eta') \cap (\text{Nor } K_v \wedge \text{Nor } \rho K'_{v'})$$

für alle $\rho \in SO_{n+1}$. Wir zeigen, daß

$$((\eta \wedge \rho\eta') \cap (\text{Nor } K_v \wedge \text{Nor } \rho K'_{v'}))\backslash B_\rho \ \subset \ (\eta \cap \text{Nor } K_v) \wedge \rho(\eta' \cap \text{Nor } K'_{v'})$$

gilt für alle $\rho \in SO_{n+1}$, für die K_w und $\rho K'_{w'}$ in allgemeiner relativer Lage sind für alle $w \in S(m)$ und alle $w' \in S(m')$.

Sei also $\rho \in SO_{n+1}$ derart, daß K_w und $\rho K'_{w'}$ in allgemeiner relativer Lage sind für alle $w \in S(m)$, $w' \in S(m')$, und sei $(x, u) \in ((\eta \wedge \rho\eta') \cap (\text{Nor } K_v \wedge \text{Nor } \rho K'_{v'}))\backslash B_\rho$. Dann gilt $(x, u) \notin \text{Nor } K_v \cup \text{Nor } \rho K'_{v'}$. Nach Definition der Verknüpfung „$\wedge$“ existieren $u_1, u_2, v_1, v_2 \in S^n$ mit $(x, u_1) \in \eta$, $(x, u_2) \in \text{Nor } K_v$, $(x, v_1) \in \rho\eta'$, $(x, v_2) \in \text{Nor } \rho K'_{v'}$, $u_1 \neq -v_1$, $u_2 \neq -v_2$ und $u \in [u_1, v_1] \cap [u_2, v_2]$. Es gilt $u \notin \{u_2, v_2\}$. Setzen wir $w := \{i \in \{1, \ldots, m\} : x \in K_i\} \in S(m)$ und $w' := \{i \in \{1, \ldots, m'\} : x \in \rho K'_i\} \in S(m')$, so gilt $v \subset w$ und $v' \subset w'$ und damit $(x, u_2) \in \text{Nor } K_w$, $(x, v_2) \in \text{Nor } \rho K'_{w'}$. Nach Definition der Mengen Nor K und Nor K' gilt wegen $\eta \subset \text{Nor } K$ und $\eta' \subset \text{Nor } K'$ außerdem $(x, u_1) \in \text{Nor } K_w$, $(x, v_1) \in \text{Nor } \rho K'_{w'}$. Da K_w und $\rho K'_{w'}$ in allgemeiner relativer Lage sind, muß $u_1 = u_2$ und $v_1 = v_2$ gelten. Damit ist also in der Tat $(x, u) \in (\eta \cap \text{Nor } K_v) \wedge \rho(\eta' \cap \text{Nor } K'_{v'})$.

Damit gilt also für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\begin{aligned} &\Theta_j(K_v \cap \rho K'_{v'}, (\eta \cap \text{Nor } K_v) \wedge \rho(\eta' \cap \text{Nor } K'_{v'})) \\ &\qquad = \ \Theta_j(K_v \cap \rho K'_{v'}, (\eta \wedge \rho\eta') \cap (\text{Nor } K_v \wedge \text{Nor } \rho K'_{v'})) \end{aligned}$$

für ν-fast alle ρ. Wenn sich K_v und $\rho K'_{v'}$ nicht berühren, so gilt $\text{Nor } K_v \wedge \text{Nor } \rho K'_{v'} = \text{Nor } (K_v \cap \rho K'_{v'}) \cap ((\text{bd } K_v \cap \text{bd } \rho K'_{v'}) \times S^n)$. Da $\Theta_j(K_v \cap \rho K'_{v'}, \cdot)$ auf $\text{Nor } (K_v \cap \rho K'_{v'})$ konzentriert ist, ist der Hilfssatz gezeigt, wenn aus $(x, u) \in (\eta \wedge \rho\eta') \cap \text{Nor } (K_v \cap \rho K'_{v'})$ stets $x \in \text{bd } K_v \cap \text{bd } \rho K'_{v'}$ folgt. Dies wollen wir abschließend noch beweisen.

Sei also $(x, u) \in (\eta \wedge \rho\eta') \cap \text{Nor } (K_v \cap \rho K'_{v'})$. Dann ist $x \in K_v$, und es gibt ein $\bar{u} \in S^n$ mit $(x, \bar{u}) \in \eta \subset \text{Nor } K$. Wir nehmen nun $x \in \text{int } K_v$ an. Dann ist insbesondere $x \in \text{int } K$. Wir können ein $P_0 \in \mathcal{P}$ wählen mit $x \in \text{int } P_0$ und $P_0 \subset K$, ferner $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{P}$ mit $K \subset \cup_{i=0}^k P_i$ und $P_i \cap \text{int } P_0 = \emptyset$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. Wir setzen $K_{ij} := P_i \cap K_j$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ordnen wir die Körper P_0, K_{ij} zu einer endlichen Folge $M_1, \ldots, M_{km+1}$ an, so gilt $K = \cup_{l=1}^{km+1} M_l$, und es ist $(x, \bar{u}) \notin \text{Nor } M_w$ für alle $w \in S(km+1)$ nach Wahl der Polytope $P_0, \ldots, P_k$. Nach

Definition der Menge Nor K ist damit $(x, \bar{u}) \notin$ Nor K. Dieser Widerspruch zeigt $x \in \operatorname{bd} K_v$, und auf analoge Weise folgt $x \in \operatorname{bd} \rho K_v$. ■

Beweis von Satz 6.1.4*:* Es seien $K, K' \in \mathcal{R}$ mit $K = \cup_{i=1}^m K_i$, $K' = \cup_{i=1}^{m'} K_i'$ und $K_1, \ldots, K_m$, $K_1', \ldots, K_{m'}' \in \mathcal{K}$. Für $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K)$, $\eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K')$, $\rho \in SO_{n+1}$ und $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt dann nach dem Einschließungs-Ausschließungs-Prinzip

$$\begin{aligned}
\Theta_j(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta') &= \Theta_j(\cup_{i=1}^m (K_i \cap \rho K'), \eta \wedge \rho\eta') \\
&= \sum_{v \in S(m)} (-1)^{|v|-1} \Theta_j(K_v \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta') \\
&= \sum_{v \in S(m)} (-1)^{|v|-1} \Theta_j(\cup_{i=1}^{m'} (K_v \cap \rho K_i'), \eta \wedge \rho\eta') \\
&= \sum_{v \in S(m)} \sum_{v' \in S(m')} (-1)^{|v|-1} (-1)^{|v'|-1} \Theta_j(K_v \cap \rho K_{v'}', \eta \wedge \rho\eta')
\end{aligned}$$

und daher wegen Hilfssatz 6.2.8 und Satz 6.1.1

$$\begin{aligned}
&\int_{SO_{n+1}} \Theta_j(K \cap \rho K', \eta \wedge \rho\eta')\, d\nu(\rho) \\
&\quad = \sum_{v \in S(m)} \sum_{v' \in S(m')} (-1)^{|v|+|v'|} \int_{SO_{n+1}} \Theta_j(K_v \cap \rho K_{v'}', \eta \wedge \rho\eta')\, d\nu(\rho) \\
&\quad = \sum_{v \in S(m)} \sum_{v' \in S(m')} (-1)^{|v|+|v'|} \\
&\qquad\qquad \times \int_{SO_{n+1}} \Theta_j(K_v \cap \rho K_{v'}', (\eta \cap \text{Nor } K_v) \wedge \rho(\eta' \cap \text{Nor } K_{v'}'))\, d\nu(\rho) \\
&\quad = \sum_{v \in S(m)} \sum_{v' \in S(m')} (-1)^{|v|+|v'|} \sum_{k=j+1}^{n-1} \Theta_k(K_v, \eta \cap \text{Nor } K_v) \Theta_{n+j-k}(K_{v'}', \eta' \cap \text{Nor } K_{v'}') \\
&\quad = \sum_{v \in S(m)} \sum_{v' \in S(m')} (-1)^{|v|+|v'|} \sum_{k=j+1}^{n-1} \Theta_k(K_v, \eta) \Theta_{n+j-k}(K_{v'}', \eta') \\
&\quad = \sum_{k=j+1}^{n-1} \Theta_k(K, \eta) \Theta_{n+j-k}(K', \eta')\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Ausdehnung der Gültigkeit von Satz 6.1.1 auf die Mengen des Konvexrings gezeigt.

Die entsprechende Ausdehnung von Satz 6.1.3 kann in analoger Weise erfolgen. Sind $K, K' \in \mathcal{R}$ und $K_1, \ldots, K_m$, $K_1', \ldots, K_{m'}' \in \mathcal{K}$ wie in Hilfssatz 6.2.8, so gilt für

$\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K \cup (K \times \{o\}))$, $\eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K' \cup (K' \times \{o\}))$

$$\begin{aligned}
&\Theta_j(K_v \cap \rho K'_{v'}, \eta \sqcap \rho\eta') \\
&\quad = \Theta_j\big(K_v \cap \rho K'_{v'}, (\eta \cap (\text{Nor } K_v \cup (K_v \times \{o\}))) \sqcap \rho(\eta' \cap (\text{Nor } K'_{v'} \cup (K'_{v'} \times \{o\})))\big)
\end{aligned}$$

für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ und alle $v \in S(m)$, $v' \in S(m')$ für ν-fast alle ρ. Die dazu erforderlichen Überlegungen sind so ähnlich zu den im Beweis von Hilfssatz 6.2.8 verwendeten Schlüssen, daß wir auf ihre Ausführung verzichten können. Die Ableitung der behaupteten Formel kann nun in derselben Weise wie oben erfolgen. ■

Beweis von Satz 6.1.5*:* Wir zeigen zuerst die folgende Aussage: Ist $S \in \mathcal{S}_q$ mit $q \in \{1, \ldots, n-1\}$ und ist $M \in \mathcal{K}$ mit $M \subset S$, so gilt für das auf die Untersphäre S bezogene Stützmaß $\Theta_j^{(S)}$, $j \in \{0, \ldots, q-1\}$, die Gleichung

$$\Theta_j^{(S)}(M, \eta) = \Theta_j(M, \eta \wedge (S \times S^*)) \tag{6.2}$$

für alle $\eta \in \mathcal{B}(S \times S)$. Zunächst ist zu beachten, daß für $\eta \in \mathcal{B}(S \times S)$ im allgemeinen $\eta \wedge (S \times S^*) \notin \mathcal{B}(\Sigma)$ gilt. Es ist aber stets $\eta \sim (S \times S^*) \in \mathcal{B}(\Sigma)$, wie leicht zu sehen ist, und

$$(\eta \wedge (S \times S^*)) \backslash (\eta \sim (S \times S^*)) \subset (S \times S) \cup (S \times S^*) \,.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\mu_\epsilon(M, (S \times S) \cup (S \times S^*)) &= \mu_\epsilon(M, S \times S^*) \\
&= \beta_q \beta_{n-q-1} V_q(M) \int_0^\epsilon \cos^q t \sin^{n-q-1} t \, dt
\end{aligned}$$

für $0 < \epsilon < \pi/2$ (vgl. den Beweis von Hilfssatz 3.1.2) ist nach der lokalen Steiner-Formel $\Theta_j(M, (S \times S) \cup (S \times S^*)) = 0$ für $j \in \{0, \ldots, q-1\}$, und $\eta \wedge (S \times S^*)$ ist daher im Definitionsbereich der Vervollständigung von $\Theta_j(M, \cdot)$ enthalten. Nun sei $M \subset S$ ein Polytop. Es gilt nach Satz 4.4.1 und wegen $\eta \subset S \times S$

$$\Theta_j^{(S)}(M, \eta) = \frac{1}{\beta_j \beta_{q-j-1}} \sum_{F \in \mathcal{F}_j(M)} \int_F \lambda^{q-j-1}(N(M, F) \cap \eta_x) \, d\lambda^j(x) \,.$$

Für alle $x \in F$ gilt

$$\frac{1}{\beta_{q-j-1}} \lambda^{q-j-1}((N(M, F) \cap \eta_x) = \frac{1}{\beta_{n-j-1}} \lambda^{n-j-1}(N(M, F) \cap (\eta \sim (S \times S^*))_x) \,,$$

wie etwa eine Anwendung des Satzes von Fubini zeigt. Damit ist

$$\Theta_j^{(S)}(M, \eta) = \Theta_j(M, \eta \sim (S \times S^*)) = \Theta_j(M, \eta \wedge (S \times S^*)) \,,$$

Gleichung (6.2) gilt also für Polytope $M \subset S$. Beachtet man, daß für in $S \times S$ offenes η die Menge $\eta \sim (S \times S^*)$ offen in Σ ist, so sieht man unter Verwendung der Stetigkeit der Θ_j ein, daß die Abbildung $M \mapsto \Theta_j(M, \cdot \wedge (S \times S^*))$ von $\{M \in \mathcal{K} : M \subset S\}$ in die Menge aller Borel-Maße auf $S \times S$ schwach stetig ist. Gleichung (6.2) gilt also auch für alle $M \in \mathcal{K}$ mit $M \subset S$.

Nun seien die Voraussetzungen des Satzes gegeben. Es sei $S \in \mathcal{S}_q$ mit $K \cap S^* = \emptyset$. Wegen $\eta \subset \operatorname{Nor} K$ ist dann $x \notin S^*$ für $(x, u) \in \eta$ und deshalb

$$\begin{aligned}
(\eta|S)^{-1} \wedge (S \times S^*) &= \{(u, x|S) \in S \times S : (x, u) \in \eta\} \wedge (S \times S^*) \\
&= \{(u, x) \in \Sigma : (x, u) \in \eta\} \wedge (S \times S^*) \\
&= \eta^{-1} \wedge (S \times S^*)\,.
\end{aligned}$$

Somit gilt nach Hilfssatz 5.2.9, Satz 4.1.2 und Gleichung (6.2)

$$\begin{aligned}
\Theta_j^{(S)}(K|S, \eta|S) &= \Theta_{q-j-1}^{(S)}(K^* \cap S, (\eta|S)^{-1}) \\
&= \Theta_{q-j-1}(K^* \cap S, (\eta|S)^{-1} \wedge (S \times S^*)) \\
&= \Theta_{q-j-1}(K^* \cap S, \eta^{-1} \wedge (S \times S^*))\,.
\end{aligned}$$

Ist $K \cap S^* \neq \emptyset$, so ist nach Hilfssatz 5.2.9 $K|S = S$, oder es berühren sich K und S^*; im Fall $K|S = S$ ist $K^* \cap S = \emptyset$ und daher $V_{q-j-1}(K^* \cap S) = V_j(K|S) = 0$. Nach Satz 6.1.1 und da sich nach Korollar 5.2.1 für ν_q-fast alle $S \in \mathcal{S}_q$ die Körper K und S^* nicht berühren, folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{S}_q} \Theta_j^{(S)}(K|S, \eta|S)\, d\nu_q(S) &= \int\limits_{\mathcal{S}_q} \Theta_{q-j-1}(K^* \cap S, \eta^{-1} \wedge (S \times S^*))\, d\nu_q(S) \\
&= \sum_{k=q-j}^{n-1} \Theta_k(K^*, \eta^{-1})\, \Theta_{n+q-j-k-1}(S, S \times S^*) \\
&= \Theta_{n-j-1}(K^*, \eta^{-1}) \\
&= \Theta_j(K, \eta)\,,
\end{aligned}$$

wobei zum Schluß wieder Satz 4.1.2 benutzt wurde. ∎

7 Distanzintegrale

Bei den bisher behandelten kinematischen Schnittformeln wird über die Menge aller Drehungen $\rho \in SO_{n+1}$ integriert, die etwa für $K, K' \in \mathcal{K}$ die Körper K und $\rho K'$ in eine Trefflage bringen. Im folgenden sollen Integrale betrachtet werden, deren Integranden nur für gewisse $\rho \in SO_{n+1}$ mit $K \cap \rho K' = \emptyset$ ungleich Null sind. Wir geben ein einfaches Beispiel für ein solches „Distanzintegral“ an, dessen Berechnung leicht mit Hilfe unserer bisherigen Ergebnisse möglich ist. Es seien $K, K' \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$. Wir definieren den *Abstand* $r(K, K')$ von K und K' zu

$$r(K, K') := \min\{d(x, y) : x \in K,\ y \in K'\}\,.$$

Wir nehmen nun weiter an, es gebe ein ϵ mit $0 < \epsilon < \pi/2$, so daß der Parallelkörper K_ϵ in $\mathcal{K}$ enthalten ist. Ist $K \neq S^n$, so gilt $K \notin \mathcal{S}$ und $K_\epsilon \notin \mathcal{S}$. Das Maß der Menge aller Drehungen $\rho \in SO_{n+1}$, für die $0 < r(K, \rho K') \leq \epsilon$ gilt, läßt sich nun mit Hilfe von Korollar 5.2.5 explizit berechnen:

$$\begin{aligned}
&\nu(\{\rho \in SO_{n+1} : 0 < r(K, \rho K') \leq \epsilon\}) \\
&\quad = \nu(\{\rho \in SO_{n+1} : K_\epsilon \cap \rho K' \neq \emptyset\}\backslash\{\rho \in SO_{n+1} : K \cap \rho K' \neq \emptyset\}) \\
&\quad = 2\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l=2k}^{n}(V_l(K_\epsilon) - V_l(K))V_{n+2k-l}(K')\,.
\end{aligned}$$

Durch Anwenden der Sätze 3.1.1 und 3.1.5 kann man $V_l(K_\epsilon)$ als Linearkombination der inneren Volumina von K schreiben, und man gelangt so zu einer Darstellung allein durch die inneren Volumina von K und K'. In geschlossener Form ist diese Darstellung in allgemeineren Beziehungen enthalten, auf die wir im folgenden vorbereiten wollen.

Unser Ziel ist eine „lokale“ Version der eben abgeleiteten Formel. Es seien konvexe Körper $K, K' \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$ gegeben, und es seien $\eta, \eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Für $0 < \epsilon < \pi/2$ suchen wir eine explizite Formel für das Maß der Menge aller Drehungen $\rho \in SO_{n+1}$ mit $0 < r(K, \rho K') < \epsilon$ und mit der Eigenschaft, daß es Punkte $x \in K$, $x' \in \rho K'$ gibt, die die Bedingungen $d(x, x') = r(K, \rho K')$, $(x, u(K, x')) \in \eta$ und $(x', u(\rho K', x)) \in \rho\eta'$ erfüllen. Man stößt hierbei auf das Problem, daß es i.a. mehrere Punktepaare gibt, die den Abstand realisieren, und dementsprechend auch mehrere zugeordnete Paare von Normalenvektoren. Es zeigt sich, daß unter der Voraussetzung „mindestens einer der Parallelkörper K_ϵ, K'_ϵ ist in $\mathcal{K}$ enthalten“ das Maß der betreffenden Menge von Drehungen als Linearkombination der Stützmaße von K und K' darstellbar ist. Ohne diese zusätzliche Voraussetzung wird man wohl nicht zu expliziten Ergebnissen unter Verwendung der Stützmaße kommen können.

Grundlage für unsere Ergebnisse über Distanzintegrale ist der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 7.1. *Ist $K \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$ und ist $0 < \epsilon < \pi/2$ derart, daß $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ ist, so existiert für jedes $K' \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$ mit $0 < r(K, K') < \epsilon$ genau ein Punktepaar $(x, x') \in K \times K'$ mit*

$$d(x, x') = r(K, K')\,.$$

Beweis: Da K und K' kompakte Mengen sind, ist die Existenz eines Punktepaares mit der fraglichen Eigenschaft klar.

Wir nehmen an, es gebe zu $K, K' \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$ mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ und $0 < r(K, K') < \epsilon < \pi/2$ zwei Paare $(x_1, x_1'), (x_2, x_2') \in K \times K'$, $(x_1, x_1') \neq (x_2, x_2')$ mit $d(x_1, x_1') = d(x_2, x_2') = r(K, K')$. Es gilt $x_1' \neq x_2'$, denn andernfalls wären sowohl x_1 als auch x_2 zu x_1' $(= x_2')$ nächste Punkte in K. Wegen $d(x_1, x_1') = d(x_2, x_2') < \pi/2$ wäre $x_1 = x_2$, also $(x_1, x_1') = (x_2, x_2')$. Weiter gilt $x_1' \neq -x_2'$, denn wegen $d(K, x_1') = d(K, x_2') < \epsilon$ wäre andernfalls $x_1', -x_1' \in \operatorname{int} K_\epsilon$ und daher $K_\epsilon = S^n$. Wegen $\epsilon < \pi/2$ wäre dann schon $K = S^n$ und daher $r(K, K') = 0$. Wir setzen $\gamma := r(K, K')$. Man sieht leicht, daß $K_\gamma = \{x \in S^n : B(x, \epsilon - \gamma) \subset K_\epsilon\}$ gilt. Wegen $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ ist für $x, y \in K_\gamma$ stets $B(x, \epsilon - \gamma) \vee B(y, \epsilon - \gamma) \subset K_\epsilon$ und deshalb $K_\gamma \in \mathcal{K}$. Die Körper K_γ und K' berühren sich. Ist H eine $(n-1)$-Untersphäre, die K_γ und K' trennt, so gilt $x_1', x_2' \in H$. Somit gilt $[x_1', x_2'] \subset \operatorname{bd} K_\gamma$. Es sei $z \in N(K_\gamma, x)$ mit beliebigem $x \in \operatorname{relint}\,[x_1', x_2']$. Es ist dann $z \in N(K_\gamma, x_1') \cap N(K_\gamma, x_2')$ und damit $z \in \operatorname{bd}\,(K_\gamma)^* \cap H_{x_1'} \cap H_{x_2'}$ und $(K_\gamma)^* \subset H^-_{x_1'} \cap H^-_{x_2'}$ (die hier verwendete Schreibweise hatten wir auf S. 10 vereinbart). Wegen $(K_\epsilon)^* \subset (K_\gamma)^*$ und $\delta((K_\epsilon)^*, (K_\gamma)^*) = \delta(K_\epsilon, K_\gamma) = \epsilon - \gamma$ (Hilfssatz 2.2) gilt andererseits $((K_\epsilon)^*)_{\epsilon-\gamma} = (K_\gamma)^*$; zu jedem Randpunkt y von $(K_\gamma)^*$ muß es daher eine sphärische Kugel B vom Radius $\epsilon - \gamma$ geben mit $B \subset (K_\gamma)^*$ und $y \in B$. Für den oben angegebenen Punkt z kann dies jedoch offenbar nicht gelten, und wir erhalten einen Widerspruch. ∎

Es sei $0 < \epsilon < \pi/2$, und es seien konvexe Körper $K, K' \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$ gegeben mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ oder $K'_\epsilon \in \mathcal{K}$. Weiter sei $0 < r(K, K') < \epsilon$. Nach Hilfssatz 7.1 existiert dann genau ein Punkt $x(K, K') \in K$, der minimalen Abstand zu K' besitzt. Der Vektor $u(K, K') := u(K, x(K', K))$ ist der „nach K' weisende Normalenvektor von K“. Zu $\eta, \eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ definieren wir

$$\begin{aligned} L_\epsilon(K, K', \eta, \eta') := \{\rho \in SO_{n+1} : {} & 0 < r(K, \rho K') < \epsilon, \\ & (x(K, \rho K'), u(K, \rho K')) \in \eta,\ (x(\rho K', K), u(\rho K', K)) \in \rho\eta'\}\,. \end{aligned}$$

Für den Fall $K = \emptyset$ oder $K' = \emptyset$ setzen wir $L_\epsilon(K, K', \eta, \eta') := \emptyset$.

Unser Ergebnis lautet nun wie folgt.

Satz 7.2. *Es sei $0 < \epsilon < \pi/2$, und es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ derart, daß $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ oder*

$K'_\epsilon \in \mathcal{K}$ ist. Dann gilt für alle $\eta, \eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$

$$\begin{aligned}
&\nu(L_\epsilon(K,K',\eta,\eta')) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{n-k-1} \alpha_{nklm}\Theta_{n-k+l-m-1}(K,\eta)\Theta_{n-l-m-1}(K',\eta') \int_0^\epsilon \cos^k t \sin^{n-k-1} t \, dt
\end{aligned}$$

mit den Konstanten

$$\alpha_{nklm} := (-1)^{n-k-m-1} \frac{\binom{n-1}{k}\binom{k}{l}\binom{n-k-1}{m}}{\binom{n-1}{k-l+m}\binom{n-1}{l+m}} \frac{\beta_{k-l+m}\beta_{n-k+l-m-1}\beta_{l+m}\beta_{n-l-m-1}}{\beta_n\beta_{n-1}} .$$

Beweis: Elementare Kompaktheitsargumente zeigen, daß die Abbildungen, die $K' \in \mathcal{K}$ mit $0 < r(K,K') < \epsilon$ die Werte $r(K,K')$, $x(K,K')$, $u(K,K')$, $x(K',K)$ und $u(K',K)$ zuordnen, stetig sind. Da auch die Abbildung $\rho \mapsto \rho K'$ stetig ist, folgt $L_\epsilon(K,K',\eta,\eta') \in \mathcal{B}(SO_{n+1})$.

Eine weitere Konsequenz ist das Folgende. Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$, und es sei $(K'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{K}$ mit $\lim_{i\to\infty} K'_i = K'$. Dann besteht die Inklusion

$$L_\epsilon(K,K',\eta,\eta') \subset \liminf_{i\to\infty} L_\epsilon(K,K'_i,\eta,\eta')$$

für alle offenen $\eta, \eta' \subset \Sigma$. Es folgt daher

$$\liminf_{i\to\infty} \nu(L_\epsilon(K,K'_i,\eta,\eta')) \geq \nu(L_\epsilon(K,K',\eta,\eta')) \tag{7.1}$$

für offene $\eta, \eta' \subset \Sigma$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\nu(L_\epsilon(K,K'_i,\Sigma,\Sigma)) &= \nu(\{\rho \in SO_{n+1} : 0 < r(K,\rho K') < \epsilon\}) \\
&= \nu(\{\rho \in SO_{n+1} : 0 < r(K,\rho K') \leq \epsilon\}) \\
&= \nu(\{\rho \in SO_{n+1} : K_\epsilon \cap \rho K'_i \neq \emptyset\}) \\
&\qquad - \nu(\{\rho \in SO_{n+1} : K \cap \rho K'_i \neq \emptyset\}) \\
&= 2\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l=2k}^{n}(V_l(K_\epsilon) - V_l(K))V_{n+2k-l}(K'_i)
\end{aligned}$$

wegen $\nu(SO_{n+1}(K_\epsilon, K')) = 0$ und nach Korollar 5.2.5, da $K, K_\epsilon \in \{\emptyset\} \cup \mathcal{K}\backslash\mathcal{S}$ sind, und wegen der Stetigkeit der inneren Volumina folgt

$$\lim_{i\to\infty} \nu(L_\epsilon(K,K'_i,\Sigma,\Sigma)) = \nu(L_\epsilon(K,K',\Sigma,\Sigma)) . \tag{7.2}$$

Wir betrachten ein festes $K \in \mathcal{K}$ mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ und ein $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ und erklären eine Abbildung $\psi : \mathcal{P} \times \mathcal{B}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(P,\eta') := \nu(L_\epsilon(K,P,\eta,\eta')) .$$

Diese Abbildung erfüllt die Voraussetzungen des Charakterisierungssatzes 4.2.1: $\psi(P,\cdot)$ ist ein auf Nor P konzentriertes, endliches Maß, das wegen der Linksinvarianz von ν die Kovarianzbedingung $\psi(\rho P, \rho\eta') = \psi(P,\eta')$ für alle $(P,\eta') \in \mathcal{P} \times \mathcal{B}(\Sigma)$ und $\rho \in SO_{n+1}$ erfüllt. Um zu sehen, daß ψ lokal erklärt ist, wählen wir $\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ und $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mit $\eta' \cap \mathrm{Nor}\ P_1 = \eta' \cap \mathrm{Nor}\ P_2$. Sei $\rho \in L_\epsilon(K, P_1, \eta, \eta')$. Für $\delta := r(K, \rho P_1)$ ist $K_\delta \in \mathcal{K}$ (vgl. den Beweis von Hilfssatz 7.1). Die Körper K_δ und ρP_1 berühren sich im Punkt $x(\rho P_1, K)$, und die $(n-1)$-Untersphäre mit Normalenvektor $u(\rho P_1, K)$ trennt K_δ und ρP_1. Wegen $(x(\rho P_1, K), u(\rho P_1, K)) \in \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ P_1) = \rho(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ P_2)$ trennt dieselbe $(n-1)$-Untersphäre auch die Körper K_δ und ρP_2, die sich ebenfalls in $x(\rho P_1, K)$ berühren. Damit ist $0 < \delta = r(K, \rho P_2) < \epsilon$, $x(\rho P_1, K) = x(\rho P_2, K)$ und $u(K, \rho P_1) = u(K, \rho P_2)$. Weiter folgt $x(K, \rho P_1) = x(K, \rho P_2)$ und $u(\rho P_1, K) = u(\rho P_2, K)$. Wir erhalten $\rho \in L_\epsilon(K, P_2, \eta, \eta')$. Da die Rollen von P_1 und P_2 vertauscht werden können, gilt $L_\epsilon(K, P_1, \eta, \eta') = L_\epsilon(K, P_2, \eta, \eta')$ und somit $\psi(P_1, \eta') = \psi(P_2, \eta')$. Nach Satz 4.2.1 existieren daher Konstanten $c_i(K, \eta) \in \mathbb{R}$, die nur von K und η abhängen, mit

$$\nu(L_\epsilon(K, P, \eta, \eta')) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(K, \eta)\Theta_i(P, \eta') \tag{7.3}$$

für alle $P \in \mathcal{P}$ und $\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Einsetzen von Untersphären für P und die Wahl $\eta' = \Sigma$ zeigen, daß $c_i(K, \cdot)$ ein Maß ist. Es besteht die Gleichung

$$\nu(L_\epsilon(K, K', \eta, \Sigma)) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(K, \eta)V_i(K')$$

für alle $K' \in \mathcal{K}$, da beide Seiten Maße sind in η, die schwach stetig von K' abhängen (links wegen (7.1) und (7.2), rechts wegen der Stetigkeit der inneren Volumina) und da die Gleichung für $K' \in \mathcal{P}$ nach (7.3) richtig ist. Wir nehmen nun vorübergehend η als offen an. Dann hängt nach dem eben Gezeigten und nach (7.1) das Maß $\nu(L_\epsilon(K, K', \eta, \cdot))$ schwach stetig von K' ab. Für offenes η ist daher wegen (7.3)

$$\nu(L_\epsilon(K, K', \eta, \eta')) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(K, \eta)\Theta_i(K', \eta')$$

für alle $K' \in \mathcal{K}$ und $\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Diese Gleichung muß nun aber auch für alle $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ gelten.

Zur Berechnung der Konstanten $c_i(K, \eta)$ setzen wir $\eta' = \Sigma$ und $K' = B_r$, wobei B_r eine sphärische Kugel vom Radius r, $0 < r < \pi/2 - \epsilon$, ist. Dann ist $L_\epsilon(K, B_r, \eta, \Sigma))$ für beliebiges $K \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ erklärt. Die durch Gleichung (4.2) gegebenen Funktionen $r \mapsto V_i(B_r)$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$, sind linear unabhängig. Nach Hilfssatz 3.1.4 läßt sich daher für gewisse r_j mit $0 < r_j < \pi/2 - \epsilon$ das lineare Gleichungssystem

$$\nu(L_\epsilon(K, B_{r_j}, \eta, \Sigma)) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(K, \eta)V_i(B_{r_j}), \qquad j \in \{0, \dots, n-1\},$$

nach den $c_i(K,\eta)$ auflösen, und mit gewissen Konstanten $a_j \in \mathbb{R}$ erhalten wir die Gleichungen

$$c_i(K,\eta) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \nu(L_\epsilon(K, B_{r_j}, \eta, \Sigma)) .$$

Wie oben zeigt man nun, daß die Abbildung $K \mapsto c_i(K,\cdot)$ schwach stetig ist und daß der Charakterisierungssatz 4.2.1 anwendbar ist. Es folgt

$$c_i(K,\eta) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} \Theta_j(K,\eta)$$

für alle $K \in \mathcal{K}$, $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ mit gewissen Konstanten $b_{ij} \in \mathbb{R}$. Es gilt also

$$\nu(L_\epsilon(K, K', \eta, \eta')) = \sum_{i,j=0}^{n-1} b_{ij} \Theta_i(K,\eta)\Theta_j(K',\eta')$$

für $K \in \mathcal{K}$ mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$, $K' \in \mathcal{K}$, $\eta, \eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Die entsprechende Aussage gilt natürlich, wenn $K \in \mathcal{K}$ beliebig und $K' \in \mathcal{K}$ mit $K'_\epsilon \in \mathcal{K}$ ist.

Um die Konstanten b_{ij} zu ermitteln, wählen wir $K = B_{r_1}$ mit $0 < r_1 < \pi/2 - \epsilon$, $K' = B_{r_2}$ mit $0 < r_2 < \pi/2$ und $\eta = \eta' = \Sigma$. (Hier und im folgenden ist B_r stets eine beliebige sphärische Kugel vom Radius $r > 0$.) Es gilt einerseits

$$\begin{aligned}
\nu(L_\epsilon(B_{r_1}, B_{r_2}, \Sigma, \Sigma)) &= \frac{1}{\beta_n}(\lambda^n(B_{r_1+r_2+\epsilon}) - \lambda^n(B_{r_1+r_2})) \\
&= \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} \int_{r_1+r_2}^{r_1+r_2+\epsilon} \sin^{n-1} t \, dt = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} \int_0^\epsilon \sin^{n-1}(r_1 + r_2 + t)\, dt \\
&= \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sin^k(r_1+r_2) \cos^{n-k-1}(r_1+r_2) \int_0^\epsilon \cos^k t \sin^{n-k-1} t \, dt \\
&= \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sum_{l=0}^{k} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^{n-k-m-1} \binom{k}{l} \binom{n-k-1}{m} \sin^{n-k+l-m-1} r_1 \\
&\qquad \times \cos^{k-l+m} r_1 \sin^{n-l-m-1} r_2 \cos^{l+m} r_2 \int_0^\epsilon \cos^k t \sin^{n-k-1} t \, dt
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\nu(L_\epsilon(B_{r_1}, B_{r_2}, \Sigma, \Sigma)) &= \sum_{i,j=0}^{n-1} b_{ij} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{j} \frac{\beta_{n-1}^2}{\beta_i \beta_{n-i-1} \beta_j \beta_{n-j-1}} \\
&\qquad \times \sin^i r_1 \cos^{n-i-1} r_1 \sin^j r_2 \cos^{n-j-1} r_2 .
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich kann man nun die Werte von b_{ij} ermitteln, und es folgt die behauptete Aussage. ■

Anwenden von Standard-Argumenten der Integrationstheorie ergibt das folgende Korollar. Die auftretenden Konstanten α_{nklm} sind dieselben wie in Satz 7.2.

Korollar 7.3. *Es seien* $0 < \epsilon < \pi/2$ *und* $K, K' \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$ *derart, daß* $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ *oder* $K'_\epsilon \in \mathcal{K}$ *gilt. Weiter sei* $f : (0,\epsilon) \times \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ *eine nichtnegative, meßbare Funktion. Dann gilt*

$$\int\limits_{0<r(K,\rho K')<\epsilon} f(r(K,\rho K'),\, (x(K,\rho K'), u(K,\rho K')),\, (x(K',\rho^{-1}K), u(K',\rho^{-1}K)))\, d\nu(\rho)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{n-k-1} \alpha_{nklm} \int\limits_0^\epsilon \int\limits_\Sigma \int\limits_\Sigma f(r,\, (x,u),\, (y,v))\, \cos^k r \sin^{n-k-1} r$$

$$d\Theta_{n-l-m-1}(K',(y,v))d\Theta_{n-k+l-m-1}(K,(x,u))\, dr.$$

Beweis: Da die Funktion f als punktweiser Limes einer monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen dargestellt werden kann, genügt es wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz, Elementarfunktionen f zu betrachten. Aus Linearitätsgründen können wir weiter $f = \mathbf{1}_A$ mit $A \in \mathcal{B}((0,\epsilon) \times \Sigma \times \Sigma)$ annehmen. Da in diesem Fall beide Seiten der zu zeigenden Gleichung endliche Maße sind in A, genügt es wegen des Eindeutigkeitssatzes der Maßtheorie, $A = (0,\delta) \times \eta \times \eta'$ anzunehmen, wobei $0 < \delta < \epsilon$ und $\eta, \eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ ist. In diesem Fall besteht die behauptete Gleichung aufgrund von Satz 7.2, da $K_\delta \in \mathcal{K}$ oder $K'_\delta \in \mathcal{K}$ gilt. ■

Man kann das eben gezeigte Ergebnis dazu benutzen, Berührwahrscheinlichkeiten für sphärisch konvexe Körper zu erklären und zu berechnen. Es seien $K, K' \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$, und es sei $0 < \epsilon < \pi/2$ mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$. Setzt man in Korollar 7.3 speziell $f = \mathbf{1}_A$ mit $A = (0,\delta) \times B$, wobei $0 < \delta < \epsilon$ und $B \in \mathcal{B}(\Sigma \times \Sigma)$ ist, so folgt mit

$$L'_\delta(K,K',B) = \{\rho \in SO_{n+1} : 0 < r(K,\rho K') < \delta,$$
$$((x(K,\rho K'), u(K,\rho K')), (x(K',\rho^{-1}K), u(K',\rho^{-1}K))) \in B\}$$

die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{\delta \searrow 0} \nu(L'_\delta(K,K',B)) = \frac{1}{\beta_n\beta_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\beta_i\beta_{n-i-1})^2}{\binom{n-1}{i}} (\Theta_i(K,\cdot) \otimes \Theta_{n-i-1}(K',\cdot))(B)\,.$$

Ist daher

$$C(K,K') := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\beta_i\beta_{n-i-1})^2}{\binom{n-1}{i}} V_i(K)V_{n-i-1}(K') \;>\; 0\,,$$

so kann man den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Sigma \times \Sigma, \mathcal{B}(\Sigma \times \Sigma), \mu(K, K', \cdot))$ mit

$$\mu(K, K', \cdot) := \frac{1}{C(K, K')} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\beta_i \beta_{n-i-1})^2}{\binom{n-1}{i}} \Theta_i(K, \cdot) \otimes \Theta_{n-i-1}(K', \cdot)$$

in natürlicher Weise als Modell für die zufällige Berührung von K und eines zu K' kongruenten konvexen Körpers in vorgegebenen Mengen aus $\mathcal{B}(\Sigma \times \Sigma)$ auffassen. Ein Elementarereignis $((x, u), (y, v)) \in \Sigma \times \Sigma$ ist dabei als das Ereignis „es existiert ein $\rho \in SO_{n+1}$ mit $K \subset H_u^-, K' \subset H_v^-, u = -\rho v, x = \rho y$ und $x \in K \cap \rho K' \cap H_u$“ zu interpretieren. Natürlich würde man gerne einen solchen Wahrscheinlichkeitsraum auch für beliebige Paare (K, K') konvexer Körper mit $C(K, K') > 0$ erklären. Da man von dem betreffenden Wahrscheinlichkeitsmaß plausiblerweise erwarten würde, daß es schwach stetig von K und K' abhängt und da die Menge aller $K \in \mathcal{K}$ mit $K_\epsilon \in \mathcal{K}$ für ein ϵ, $0 < \epsilon < \pi/2$, dicht ist in $\mathcal{K} \backslash \mathcal{S}$, liegt es nahe, den obigen Wahrscheinlichkeitsraum auch für beliebige $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $C(K, K') > 0$ als Modell zu akzeptieren. (Der Beweis der Dichtheitsaussage soll nur kurz skizziert werden: Ist $K \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{S}$ und ist $0 < \gamma < \pi/2$, so existiert ein $P \in \mathcal{P}$ mit $\operatorname{int} P \neq \emptyset$, $K^* \subset P$ und $\delta(K^*, P) < \gamma/2$. Nach Bangert [4], Korollar (2.5), existiert ein $M \in \mathcal{K}$ mit $\delta(P, M) < \gamma/2$ derart, daß bd M eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von S^n ist. Daraus kann man die Existenz eines $\epsilon > 0$ und eines $L \in \mathcal{K}$ folgern mit $L_\epsilon = M$. Es gilt dann $\delta(M^*, K) < \gamma$ und $(M^*)_\epsilon \in \mathcal{K}$.)

Ist man bereit, den oben angegebenen Wahrscheinlichkeitsraum als naheliegendes Modell zu akzeptieren, so erhalten insbesondere die Stützmaße eine einfache anschauliche Interpretation: Ist $V_i(K) > 0$, so „mißt“ $\Theta_i(K, \eta)$ in natürlicher Weise die Menge der den Körper $K \in \mathcal{K}$ in $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ berührenden $(n - i - 1)$-Untersphären, d.h. die Menge $\{S \in \mathcal{S}_{n-i-1} :$ es existiert ein $(x, u) \in \eta$ mit $K \subset H_u^-, S \subset H_u$ und $x \in K \cap S\}$.

Es soll im folgenden noch kurz ein axiomatischer Zugang zum Berührproblem zur Sprache kommen, der die spezielle Wahl des obigen Wahrscheinlichkeitsraums als Modell für zufällige Berührung zweier konvexer Körper in Mengen von Stützelementen von einem weiteren Gesichtspunkt aus als überaus natürlich erscheinen läßt.

Ist für $K, K' \in \mathcal{K}$ das Maß $\nu(K, K', \cdot)$ auf $\mathcal{B}(\Sigma \times \Sigma)$ definiert durch

$$\nu(K, K', \cdot) := \frac{1}{\beta_n \beta_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\beta_i \beta_{n-i-1})^2}{\binom{n-1}{i}} \Theta_i(K, \cdot) \otimes \Theta_{n-i-1}(K', \cdot)\,,$$

so weist man leicht die folgenden fünf Eigenschaften nach:

(a) Für $K, K' \in \mathcal{K}$ und $A, B \in \mathcal{B}(\Sigma)$ gilt

$$\nu(K, K', A \times B) = \nu(K', K, B \times A)\,.$$

(b) Für $K, K' \in \mathcal{K}$, $A, B \in \mathcal{B}(\Sigma)$ und $\rho \in SO_{n+1}$ gilt

$$\nu(K, K', A \times B) = \nu(\rho K, K', \rho A \times B)\,.$$

(c) Die Abbildung $K \mapsto \nu(K, K', \cdot)$ ist schwach stetig.

(d) Für $K_1, K_2, K, K' \in \mathcal{K}$ und $A, B \in \mathcal{B}(\Sigma)$ mit $A \cap \operatorname{Nor} K_1 = A \cap \operatorname{Nor} K_2$ gilt

$$\nu(K_1, K', A \times B) = \nu(K_2, K', A \times B),$$

und $\nu(K, K', \cdot)$ ist auf $\operatorname{Nor} K \times \operatorname{Nor} K'$ konzentriert.

(e) Sind B_r, B_s sphärische Kugeln mit Radien $r, s \leq \pi/2$, so gilt

$$\nu(B_r, B_s, \Sigma \times \Sigma) = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} \sin^{n-1}(r+s).$$

Ist nun umgekehrt für $K, K' \in \mathcal{K}$ ein endliches Maß $\nu(K, K', \cdot)$ auf $\mathcal{B}(\Sigma \times \Sigma)$ gegeben, so erscheinen die Eigenschaften (a) – (e) als Forderungen an $\nu(K, K', \cdot)$ geometrisch überaus plausibel, wenn $\nu(K, K', \cdot)$ nach Normierung (sofern diese möglich ist) in natürlicher Weise die zufällige Berührung von K durch kongruente Bilder von K' beschreiben soll (die in (e) auftretende Normierungskonstante β_{n-1}/β_n ist natürlich ganz unwesentlich). Eine einfache Anwendung des Charakterisierungssatzes 4.2.1 zeigt nun aber, daß $\nu(K, K', \cdot)$ in der Tat durch die Eigenschaften (a) – (e) eindeutig festgelegt ist, also notwendig die oben angegebene Darstellung besitzt. Wir wollen die dazu erforderlichen einfachen Schlüsse nicht näher ausführen.

Wir geben einige knappe Literaturhinweise zu dem in diesem Abschnitt angesprochenen Thema. Einen Überblick über Distanzintegrale und die damit zusammenhängenden Berührmaße im euklidischen Raum findet man in Schneider & Wieacker [43]; dort werden die für die Entwicklung dieses Gebiets wesentlichen Arbeiten zitiert. Einen axiomatischen Zugang zu gewissen Berührwahrscheinlichkeiten bei euklidisch konvexen Körpern von der Art der oben angedeuteten Überlegungen hat Schneider [33] gegeben. Berührsituationen für Untermannigfaltigkeiten von Räumen konstanter Krümmung hat Teufel [45] behandelt.

8 Einige Resultate der euklidischen Integralgeometrie

Aus der Behandlung integralgeometrischer Probleme für sphärisch konvexe Körper in den letzten Kapiteln haben sich Ideen ergeben, die auch in der euklidischen Integralgeometrie Anwendung finden können. Zum einen werden wir in Abschnitt 8.2 einen neuen Beweis für die abstrakte lokale kinematische Formel von Schneider [40] geben, wobei der hier vorgestellte Beweis einfacher ist als der ursprüngliche in [40]. Zum zweiten gehen wir in den Abschnitten 8.3 und 8.4 auf kinematische Schnittformeln für verallgemeinerte Krümmungsmaße von euklidisch konvexen Körpern und Mengen des Konvexrings ein, die bisher in der Literatur nicht behandelt worden sind. Auch bei konvexen Körpern im euklidischen Raum werden wir die alternative Bezeichnung „Stützmaße" statt „verallgemeinerte Krümmungsmaße" verwenden. In 8.3 stellen wir unsere Ergebnisse vor, die Beweise werden in 8.4 gegeben. Da die Beweise teilweise völlig analog zum sphärischen Fall verlaufen, können wir uns in diesen Kapitel an den entsprechenden Stellen kurz fassen. Wir zeigen eine Version der Crofton-Formel für Stützmaße von Mengen des Konvexrings. In einem Spezialfall liefert diese Formel eine neue anschauliche Interpretation der Stützmaße. Weiter behandeln wir Versionen der kinematischen Hauptformel für Stützmaße. Es wird eine bisher nicht formulierte Vermutung über Paare konvexer Körper vorgestellt, die mit bekannten, aber nicht einfach zu beweisenden Aussagen über die Randstruktur konvexer Körper in einer gewissen Verbindung steht (gemeint sind die Resultate von Ewald, Larman & Rogers [6], Zalgaller [52], Ivanov [16] und Theorem 2 in Schneider [35]). Unter der Hypothese, daß diese Vermutung zutrifft, wird die kinematische Hauptformel für Stützmaße bewiesen. Es wird gezeigt, daß die erwähnte Vermutung für die Dimensionen 2 und 3 sowie allgemein für Paare konvexer Körper richtig ist, wenn einer der beiden Körper ein Polytop ist. Heuristische Überlegungen führen zu einer in gewisser Weise dualen Vermutung, die, falls sie zutrifft, ein Resultat von Ivanov [16] verallgemeinert.

8.1 Notation und Vorbemerkungen

Wir bereiten nun die Formulierung unserer integralgeometrischen Ergebnisse über euklidisch konvexe Körper vor. Was die Notation anbetrifft, so verwenden wir im wesentlichen diejenige aus Schneider & Weil [42]. Da sich aus diesem Grund Inkonsistenzen mit der bisher für den sphärischen Fall verwendeten Notation ergeben, weisen wir ausdrücklich darauf hin, daß wir einen Teil der bisher benutzten Bezeichnungen und Symbole von nun an mit anderen Bedeutungen verwenden. Wir legen nun die im weiteren verwendete Notation neu fest.

Wir beziehen uns auf den n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standard-

Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, induzierter Norm $\|\cdot\|$ und Ursprung o. Die lineare, affine bzw. konvexe Hülle einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ wird mit lin A, aff A bzw. mit conv A bezeichnet. Es sei $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ und $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Es sei $\mathcal{K}$ die Menge aller *konvexen Körper* (d.h. aller kompakten, konvexen Teilmengen) von $\mathbb{R}^n$, versehen mit der von der Hausdorff-Metrik induzierten Topologie. (Nach Definition ist auch die leere Menge in $\mathcal{K}$ enthalten; diese sei ein isolierter Punkt in $\mathcal{K}$.) Das Innere von $K \in \mathcal{K}$ sei mit int K, der Rand mit bd K bezeichnet; dim K ist die Dimension der affinen Hülle von K. Es sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ die Menge aller *konvexen Polytope* (d.h. aller konvexen Hüllen endlicher Teilmengen) von $\mathbb{R}^n$ (einschließlich $\emptyset$). Für $K \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $d(K,x)$ der *euklidische Abstand* von x zu K, und es sei $p(K,x) \in K$ die *metrische Projektion* von x in K (d.h. der zu x nächste Punkt in K). Ist $d(K,x) > 0$, so sei $u(K,x) := (x - p(K,x))/d(K,x)$. Wir setzen $\Sigma := \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ und Nor $K := \{(p(K,x), u(K,x)) \in \Sigma : x \in \mathbb{R}^n\backslash K\}$ für $K \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$; ferner sei Nor $\emptyset := \emptyset$. Die Elemente von Nor K bezeichnen wir als *Stützelemente* von K. Die Menge Nor $K \subset \Sigma$ ist stets kompakt. Für $K \in \mathcal{K}$ und $x \in K$ sei $N(K,x)$ der *Normalenkegel* von K in x, d.h. $N(K,x)$ ist der konvexe Kegel

$$\{u \in \mathbb{R}^n : \langle u,x\rangle \geq \langle u,y\rangle \text{ für alle } y \in K\}$$

aller äußeren Normalenvektoren von K im Punkt x. Für $\epsilon > 0$, $K \in \mathcal{K}\backslash\{\emptyset\}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ (wobei $\mathcal{B}(X)$ wie bisher die Borelsche σ-Algebra eines topologischen Raumes X bedeutet) sei

$$M_\epsilon(K,\eta) := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(K,x) \leq \epsilon, (p(K,x), u(K,x)) \in \eta\}$$

die *lokale Parallelmenge*, und es sei $\mu_\epsilon(K,\eta) := \lambda(M_\epsilon(K,\eta))$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Ist wie früher κ_k das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel, so gilt die *Steiner-Formel*

$$\mu_\epsilon(K,\eta) = \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon^{n-j}\kappa_{n-j}\Theta_j(K,\eta)\,,$$

wobei durch die Koeffizienten dieses Polynoms die *Stützmaße* (oder *verallgemeinerten Krümmungsmaße*) $\Theta_j(K,\cdot)$ auf $\mathcal{B}(\Sigma)$ definiert werden (vgl. [39], Theorem 4.2.1, wobei dort andere Normierungen gewählt wurden). Für $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ sei $\Theta_j(\emptyset,\cdot) := 0$, für $\epsilon > 0$ sei $\mu_\epsilon(\emptyset,\cdot) := 0$ gesetzt. Wählt man in der Steiner-Formel der Reihe nach $\epsilon = 1,2,\ldots,n$, so kann man das entstehende lineare Gleichungssystem auflösen, und es resultiert

$$\Theta_j(K,\cdot) = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\mu_k(K,\cdot) \tag{8.1}$$

für alle $K \in \mathcal{K}$ mit gewissen Konstanten $b_{jk} \in \mathbb{R}$. Für $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ wird durch $\Phi_j(K,A) := \Theta_j(K, A \times S^{n-1})$ das *j-te Krümmungsmaß* und durch $\Phi_n(K,A) :=$

$\lambda(K \cap A)$ das *n-te Krümmungsmaß* von $K \in \mathcal{K}$ definiert (jeweils $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Weitere Spezialisierung liefert für $j \in \{0, \ldots, n\}$ das *j-te innere Volumen* $V_j(K) := \Phi_j(K, \mathbb{R}^n)$ von $K \in \mathcal{K}$. Für die wichtigsten Eigenschaften der Funktionale Θ_j, Φ_j und V_j verweisen wir auf Schneider [39], Abschnitt 4.2. Auf eine Eigenschaft der Stützmaße, die leicht aus ihrer Definition folgt, wollen wir gesondert hinweisen: Das Funktional Θ_j ist lokal erklärt, d.h. sind $K, K' \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ mit $\eta \cap \operatorname{Nor} K = \eta \cap \operatorname{Nor} K'$, so gilt $\Theta_j(K, \eta) = \Theta_j(K', \eta)$.

Der *Konvexring* $\mathcal{R}$ ist die Menge aller endlichen Vereinigungen konvexer Körper. Es gibt eindeutig bestimmte Fortsetzungen der Stützmaße Θ_j auf $\mathcal{R}$, die additiv sind auf $\mathcal{R}$, d.h. mit der Eigenschaft

$$\Theta_j(K \cap K', \cdot) + \Theta_j(K \cup K', \cdot) = \Theta_j(K, \cdot) + \Theta_j(K', \cdot)$$

für alle $K, K' \in \mathcal{R}$ (wir führen also keine neuen Symbole für diese Fortsetzungen ein). Eine Konstruktion dieser Fortsetzungen findet man etwa in Schneider [39], Abschnitt 4.4. Ist $K \in \mathcal{R}$ dargestellt als Vereinigung der konvexen Körper $K_1, \ldots, K_m$, so gilt

$$\Theta_j(K, \cdot) = \sum_{v \in S(m)} (-1)^{|v|-1} \Theta_j(K_v, \cdot)\,;$$

hierbei ist wie früher $S(m)$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von $\{1, \ldots, m\}$, für $v \in S(m)$ ist $|v|$ die Elementzahl von v, und es ist $K_v := \cap_{i \in v} K_i$.

G_n bzw. SO_n seien die Gruppen aller eigentlichen Bewegungen bzw. eigentlichen Drehungen von $\mathbb{R}^n$, jeweils versehen mit der üblichen Topologie. Es seien μ bzw. ν die Haarschen Maße auf G_n bzw. SO_n, normiert durch $\mu(\{g \in G_n : g(o) \in B^n\}) = \kappa_n$ bzw. durch $\nu(SO_n) = 1$. Es bezeichne $\mathcal{E}_q^n$ (bzw. $\mathcal{L}_q^n$) die Menge aller affinen (bzw. linearen) q-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^n$, $q \in \{0, \ldots, n\}$, versehen mit der üblichen Topologie. Es sei μ_q (bzw. ν_q) das Haarsche Maß auf dem homogenen G_n- (bzw. SO_n-) Raum $\mathcal{E}_q^n$ (bzw. $\mathcal{L}_q^n$), normiert durch $\mu_q(\{E \in \mathcal{E}_q^n : E \cap B^n \neq \emptyset\}) = \kappa_{n-q}$ (bzw. durch $\nu_q(\mathcal{L}_q^n) = 1$). Ist $E \in \mathcal{E}_q^n$, so bezeichnen wir mit λ^E das q-dimensionale Lebesgue-Maß in der Ebene E. Für die Maße μ und μ_q gelten die folgenden Transformationsformeln (vgl. [42], Beweis von Satz 1.2.6 und Gleichung (1.9)). Ist $f : G_n \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, meßbare Funktion, so gilt

$$\int_{G_n} f\, d\mu = \int_{SO_n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau(x) \circ \vartheta)\, d\lambda(x) d\nu(\vartheta)\,,$$

wobei $\tau(x)$ die Translation mit $x \in \mathbb{R}^n$ ist. Ist $f : \mathcal{E}_q^n \to \mathbb{R}$ nichtnegativ und meßbar, so gilt

$$\int_{\mathcal{E}_q^n} f\, d\mu_q = \int_{SO_n} \int_{\vartheta L_q^\perp} f(\vartheta L_q + x)\, d\lambda^{\vartheta L_q^\perp}(x) d\nu(\vartheta)\,,$$

wobei $L_q \in \mathcal{L}_q^n$ ein beliebiger q-dimensionaler linearer Unterraum und $L_q^\perp$ sein orthogonales Komplement ist.

Wir zitieren nun die Crofton-Formel und die kinematische Hauptformel in den Versionen für Krümmungsmaße konvexer Körper. Es werden dabei die durch

$$\alpha_{njk} := \frac{\binom{k}{j}\kappa_k\kappa_{n+j-k}}{\binom{n}{k-j}\kappa_j\kappa_n} = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+j-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

definierten Konstanten benutzt. Beweise für die folgenden beiden Sätze findet man z.B. in Schneider & Weil [42].

Satz 8.1.1. (Crofton-Formel) *Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $q \in \{0, \dots, n\}$ und $j \in \{0, \dots, q\}$ die Beziehung*

$$\int\limits_{\mathcal{E}_q^n} \Phi_j(K \cap E, A \cap E)\, d\mu(E) = \alpha_{njq}\Phi_{n+j-q}(K, A)\,.$$

Satz 8.1.2. (Kinematische Hauptformel) *Für $K, K' \in \mathcal{K}$, $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $j \in \{0, \dots, n\}$ gilt die Formel*

$$\int\limits_{G_n} \Phi_j(K \cap gK', A \cap gB)\, d\mu(g) = \sum_{k=j}^{n} \alpha_{njk}\Phi_k(K, A)\Phi_{n+j-k}(K', B)\,.$$

Wir werden Charakterisierungssätze für die Φ_j und die Θ_j benötigen. Die folgende Aussage kann dem Beweis von Theorem 6.1 in Schneider [34] entnommen werden.

Satz 8.1.3. *Es sei $\psi : \mathcal{P}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle $P \in \mathcal{P}$ ist $\psi(P, \cdot)$ ein (endliches) Maß.*

(b) *Es gilt $\psi(gP, gA) = \psi(P, A)$ für alle $P \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in G_n$.*

(c) *Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und sind $P, P' \in \mathcal{P}$ mit $P \cap B = P' \cap B$, so ist $\psi(P, A) = \psi(P', A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \subset B$.*

(d) *Für alle $P, P' \in \mathcal{P}$ mit $P \cup P' \in \mathcal{P}$ gilt*

$$\psi(P \cup P', \cdot) + \psi(P \cap P', \cdot) = \psi(P, \cdot) + \psi(P', \cdot)\,.$$

Dann gibt es Zahlen $c_0, \dots, c_n \geq 0$ mit

$$\psi(P, \cdot) = \sum_{i=0}^{n} c_i\Phi_i(P, \cdot)$$

für alle $P \in \mathcal{P}$.

Eine ähnliche Aussage gilt auch für die Stützmaße. Der Beweis verläuft weitgehend analog zu dem der sphärischen Entsprechung (Satz 4.2.1); es genügt daher, die nötigen Überlegungen nur kurz anzudeuten.

Satz 8.1.4. *Es sei* $\psi : \mathcal{P} \times \mathcal{B}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle* $P \in \mathcal{P}$ *ist* $\psi(P, \cdot)$ *ein (endliches) signiertes Maß.*

(b) *Es gilt* $\psi(gP, g\eta) = \psi(P, \eta)$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$, $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ *und* $g \in G_n$, *wobei hier* $g\eta := \{(gx, \vartheta u) \in \Sigma : (x, u) \in \eta\}$ *ist (wenn* $g = \tau \circ \vartheta$ *die Zerlegung von* g *in eine Translation* τ *und eine Drehung* $\vartheta \in SO_n$ *ist).*

(c) *Ist* $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ *und sind* $P, P' \in \mathcal{P}$ *derart, daß* $\eta \cap \mathrm{Nor}\, P = \eta \cap \mathrm{Nor}\, P'$ *gilt, so ist* $\psi(P, \eta) = \psi(P', \eta)$.

Dann gibt es Zahlen $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\psi(P, \cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \Theta_i(P, \cdot)$$

für alle $P \in \mathcal{P}$.

Beweisskizze: Unter Verwendung von (b) und der Tatsache, daß ψ nur reelle Werte annimmt, kann man leicht zeigen, daß $\psi(\emptyset, \cdot) \equiv 0$ ist. Aus (c) folgt nun, daß $\psi(P, \cdot)$ auf $\mathrm{Nor}\, P$ konzentriert ist für alle $P \in \mathcal{P}$. Nun kann man die Behauptung ähnlich wie im Beweis von Satz 4.2.1 zeigen. ■

8.2 Die abstrakte lokale kinematische Formel

Der nachfolgende, von Schneider [40] bewiesene Satz entspricht im sphärischen Raum Satz 5.3.1. Es soll nun ein neuer Beweis für dieses Resultat gegeben werden, der ähnlich wie im sphärischen Raum verläuft.

Satz 8.2.1. *Es sei* $\Lambda : \mathcal{K} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *eine nichtnegative Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle* $K \in \mathcal{K}$ *sei* $\Lambda(K, \cdot)$ *ein auf* K *konzentriertes (endliches) Maß.*

(b) *Die Abbildung* $K \mapsto \Lambda(K, \cdot)$ *sei schwach stetig.*

(c) Λ *sei lokal erklärt, d.h. für* $K, K' \in \mathcal{K}$ *und offenes* $B \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $K \cap B = K' \cap B$ *sei* $\Lambda(K, A) = \Lambda(K', A)$ *für alle* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $A \subset B$.

(d) Λ *sei additiv, d.h. für* $K, K' \in \mathcal{K}$ *mit* $K \cup K' \in \mathcal{K}$ *sei*

$$\Lambda(K \cup K', \cdot) + \Lambda(K \cap K', \cdot) = \Lambda(K, \cdot) + \Lambda(K', \cdot)\,.$$

Dann gilt für alle $K, K' \in \mathcal{K}$ *und* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *die Formel*

$$\int\limits_{G_n} \Lambda_j(K \cap gK', A \cap gB)\, d\mu(g) = \alpha_{n0j} \sum_{k=j}^{n} \frac{\alpha_{njk}}{\alpha_{n0k}}\, \Lambda_k(K, A)\Phi_{n+j-k}(K', B)$$

für $j \in \{0, \ldots, n\}$*, wobei durch*

$$\Lambda_j(K, A) := \int\limits_{\mathcal{E}^n_{n-j}} \Lambda(K \cap E, A \cap E)\, d\mu_{n-j}(E)$$

das j-te assoziierte Maß $\Lambda_j(K, \cdot)$ *von* $\Lambda(K, \cdot)$ *definiert wird.*

Beispiele für die betrachteten Abbildungen Λ sind die Krümmungsmaße Φ_j. Wir verweisen auf [40] für weitere Beispiele. Wegen der Crofton-Formel (Satz 8.1.1) folgt für $\Lambda := \Phi_0$

$$\Lambda_j = \alpha_{n0(n-j)}\Phi_j = \alpha_{n0j}\Phi_j$$

für $j \in \{0, \ldots, n\}$. Satz 8.2.1 enthält damit die kinematische Hauptformel für Krümmungsmaße (Satz 8.1.2) als Spezialfall.

Beweis von Satz 8.2.1*:* Es sei $j \in \{0, \ldots, n\}$. Wie in [40], S. 280 f., gezeigt wurde (und im übrigen auch völlig analog zu der Argumentation im Beweis von Satz 5.3.1), folgt aus den Eigenschaften (a) und (b), daß das $\Lambda_j(K, A)$ definierende Integral existiert, und daß $\Lambda_j(K, \cdot)$ ein endliches Maß ist. Die Eigenschaften (a) – (d) übertragen sich von Λ auf die assoziierten Funktionale Λ_j. Wie in [40], S. 281, zeigt man, daß das Integral in der behaupteten Gleichung existiert und endlich ist.

Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren eine Abbildung $\psi : \mathcal{K} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(K', B) := \int\limits_{G_n} \Lambda_j(K \cap gK', A \cap gB)\, d\mu(g)\,.$$

Analog wie im Beweis von Satz 5.3.1 sieht man, daß die Einschränkung von ψ auf $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Voraussetzungen des Charakterisierungssatzes 8.1.3 erfüllt. Es gibt daher Zahlen $c_0, \ldots, c_n \geq 0$, die nur von K, A und Λ_j abhängen, mit

$$\psi(K', B) = \sum_{i=0}^{n} c_i \Phi_{n-i}(K', B)$$

für alle $K' \in \mathcal{P}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Wir bestimmen nun die Konstanten c_i. Es sei $i \in \{0, \dots, n\}$, und es sei $L \in \mathcal{L}^n_{n-i}$. Wir wählen eine offene, beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^L(L \cap B) = 1$. Weiter sei $K' \in \mathcal{P}$ ein Polytop mit $K' \subset L$, das $B \cap L$ in seinem relativen Inneren enthält. Es gilt dann $\Phi_k(K', B) = 1$ für $k = n - i$ und $\Phi_k(K', B) = 0$ für $k \neq n - i$. Ferner gilt $K \cap gK' \cap gB = K \cap gL \cap gB$ und damit

$$\Lambda_j(K \cap gK', A \cap gB) = \Lambda_j(K \cap gL, A \cap gB)$$

für alle $g \in G_n$, da die assoziierten Funktionale lokal erklärt sind. Damit ist

$$\begin{aligned}
c_i &= \int_{G_n} \Lambda_j(K \cap gK', A \cap gB)\, d\mu(g) \\
&= \int_{G_n} \Lambda_j(K \cap gL, A \cap gB)\, d\mu(g) \\
&= \int_{SO_n} \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda_j(K \cap (\rho L + x), A \cap (\rho B + x))\, d\lambda(x) d\nu(\rho) \\
&= \int_{SO_n} \int_{\rho L^\perp} \int_{\rho L} \Lambda_j(K \cap (\rho L + x_1 + x_2), A \cap (\rho B + x_1 + x_2))\, d\lambda^{\rho L}(x_1) \\
&\qquad\qquad d\lambda^{\rho L^\perp}(x_2) d\nu(\rho) \\
&= \int_{SO_n} \int_{\rho L^\perp} \int_{\rho L} \Lambda_j(K \cap (\rho L + x_2), A \cap (\rho B + x_1 + x_2))\, d\lambda^{\rho L}(x_1) d\lambda^{\rho L^\perp}(x_2) d\nu(\rho) \\
&= \int_{SO_n} \int_{\rho L^\perp} \int_{\rho L} \int_{\rho L + x_2} \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_{\rho B + x_1 + x_2}(x)\, d\Lambda_j(K \cap (\rho L + x_2), x) d\lambda^{\rho L}(x_1) \\
&\qquad\qquad d\lambda^{\rho L^\perp}(x_2) d\nu(\rho) \\
&= \int_{SO_n} \int_{\rho L^\perp} \int_{\rho L + x_2} \mathbf{1}_A(x) \int_{\rho L} \mathbf{1}_{-\rho B - x_2 + x}(x_1)\, d\lambda^{\rho L}(x_1) d\Lambda_j(K \cap (\rho L + x_2), x) \\
&\qquad\qquad d\lambda^{\rho L^\perp}(x_2) d\nu(\rho)\,,
\end{aligned}$$

wobei wie früher $\mathbf{1}_A$ die Indikatorfunktion der Menge A bedeutet. Nun gilt

$$\int_{\rho L} \mathbf{1}_{-\rho B - x_2 + x}(x_1)\, d\lambda^{\rho L}(x_1) = \lambda^{\rho L}(\rho L \cap \rho B) = \lambda^L(L \cap B) = 1$$

für alle $x_2 \in \rho L^\perp$ und alle $x \in \rho L + x_2$ und damit

$$\begin{aligned} c_i &= \int_{SO_n} \int_{\rho L^\perp} \Lambda_j(K \cap (\rho L + x), A \cap (\rho L + x))\, d\lambda^{\rho L^\perp}(x) d\nu(\rho) \\ &= \int_{\mathcal{E}^n_{n-i}} \Lambda_j(K \cap E, A \cap E)\, d\mu_{n-i}(E) \\ &= \int_{\mathcal{E}^n_{n-i}} \int_{\mathcal{E}^n_{n-j}} \Lambda(K \cap E \cap F, A \cap E \cap F)\, d\mu_{n-j}(F) d\mu_{n-i}(E)\,. \end{aligned}$$

Ist $i + j > n$, so gilt für jedes $E \in \mathcal{E}^n_{n-i}$, daß der Schnitt $E \cap F$ leer ist für μ_{n-j}-fast alle $F \in \mathcal{E}^n_{n-j}$ (dies folgt leicht aus [42], Satz 1.2.5). Daher ist $c_{n-j+1} = \cdots = c_n = 0$. Nun sei $i + j \leq n$. Setzen wir $X := \{(E, F) \in \mathcal{E}^n_{n-i} \times \mathcal{E}^n_{n-j} : E \cap F \in \mathcal{E}^n_{n-i-j}\}$, so gilt $\mu_{n-i} \otimes \mu_{n-j}((\mathcal{E}^n_{n-i} \times \mathcal{E}^n_{n-j}) \setminus X) = 0$. Das Bildmaß der Einschränkung von $\mu_{n-i} \otimes \mu_{n-j}$ auf X unter der (stetigen) Abbildung $X \to \mathcal{E}^n_{n-i-j}$, $(E, F) \mapsto E \cap F$, ist ein nicht identisch verschwindendes, bewegungsinvariantes Maß auf $\mathcal{E}^n_{n-i-j}$, das endlich ist auf kompakten Mengen. Aus Satz 1.3.4 in [42] folgt daher, daß dieses Bildmaß ein positives Vielfaches von μ_{n-i-j} sein muß. Mit dem Satz von Fubini und dem Transformationssatz folgt daher

$$\begin{aligned} c_i &= d_{ij} \int_{\mathcal{E}^n_{n-i-j}} \Lambda(K \cap E, A \cap E)\, d\mu_{n-i-j}(E) \\ &= d_{ij} \Lambda_{i+j}(K, A) \end{aligned}$$

mit einer von i und j, nicht aber von Λ, K und A abhängigen Konstanten $d_{ij} > 0$.

Damit gilt also

$$\int_{G_n} \Lambda_j(K \cap gK', A \cap gB)\, d\mu(g) = \sum_{k=j}^{n} d_{(k-j)j} \Lambda_k(K, A) \Phi_{n+j-k}(K', B)$$

für alle $K \in \mathcal{K}$, $K' \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und alle offenen $A \subset \mathbb{R}^n$. Da beide Seiten dieser Gleichung Maße sind in A, gilt diese Gleichung auch für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Völlig analog wie im Beweis von Satz 5.3.1 sieht man nun, daß $\psi(K', \cdot)$ schwach stetig von $K' \in \mathcal{K}$ abhängt (die in der Definition von ψ verwendete Menge A wird weiter als offen angenommen). Mittels Approximation durch Polytope sieht man daher, daß die eben genannte Gleichung auch für alle $K' \in \mathcal{K}$ und alle offenen $A \subset \mathbb{R}^n$, somit also auch für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ besteht.

Setzt man speziell $\Lambda = \Phi_0$, so ist nach der Crofton-Formel $\Lambda_k = \alpha_{n0k} \Phi_k$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$. Indem man etwa $A = B = \mathbb{R}^n$ setzt, $K \in \mathcal{K}$ mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ wählt und $K' = \alpha K$ setzt für positive reelle Zahlen α, zeigt ein Vergleich mit der kinematischen

Hauptformel unter Verwendung der Homogenitätseigenschaften der inneren Volumina für die Konstanten $d_{(k-j)j} = \alpha_{n0j}\alpha_{njk}/\alpha_{n0k}$ und damit die Behauptung. ■

8.3 Kinematische Formeln für Stützmaße

Ähnlich wie im sphärischen Raum sollen nun auch Versionen der kinematischen Hauptformel und der Crofton-Formel für Stützmaße formuliert und bewiesen werden. Die Beweise der Sätze dieses Abschnitts tragen wir in 8.4 nach. Im Fall der kinematischen Hauptformel ist es uns für Dimensionen $n \geq 4$ allerdings zunächst nicht möglich, beliebige Paare konvexer Körper zuzulassen. Ein wesentliches Hilfsmittel im Beweis ist nämlich – ähnlich wie im sphärischen Fall – die folgende Aussage über Paare konvexer Körper, die wir in ihrer Allgemeinheit nur als Vermutung aussprechen können. (Wie üblich setzen wir $\operatorname{lin} \emptyset := \{o\}$.)

Vermutung 8.3.1. *Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$. Dann gilt für μ-fast alle $g \in G_n$*

$$\operatorname{lin} N(K,x) \cap \operatorname{lin} N(gK',x) = \{o\}$$

für alle $x \in K \cap gK'$.

Zugunsten unserer Vermutung können wir (neben dem durch Hilfssatz 6.2.1 gegebenen sphärischen Pendant) die folgenden beiden Resultate anführen.

Satz 8.3.2. *Für $n \in \{2,3\}$ ist Vermutung* 8.3.1 *richtig.*

Bemerkung: Der Beweis dieses Satzes, der auf Anregungen von Herrn Professor Schneider zurückgeht, zeigt eine allgemeinere Aussage. Für beliebiges n werden gewisse Teilbehauptungen von Vermutung 8.3.1 bewiesen, die für die Dimensionen 2 und 3 schon die allgemeine Behauptung ergeben. Der Beweis von Satz 8.3.2 zeigt auch, daß die Vermutung zutrifft, falls K und K' glatte konvexe Körper sind. Für diesen Fall reduziert sich die unten bewiesene Schnittformel jedoch auf bekannte Resultate.

Wir nennen im folgenden ein Paar (K, K') konvexer Körper *zulässig*, wenn die eben genannte Vermutung auf dieses Paar zutrifft. Unter Verwendung eines Ergebnisses von Zalgaller [52] über die Randstruktur konvexer Körper können wir zeigen, daß Paare konvexer Körper zulässig sind, wenn einer der beiden Körper ein Polytop ist:

Satz 8.3.3. *Ist $K \in \mathcal{K}$ und ist $P \in \mathcal{P}$, so sind die Paare (K,P) und (P,K) zulässig.*

Bemerkung: Der Beweis dieses Satzes zeigt, daß seine Aussage richtig bleibt, wenn P ein konvexer Körper mit nur abzählbar vielen Seiten ist.

Wir definieren nun die in den kinematischen Formeln auftretenden Verknüpfungen für Teilmengen von Σ. Sind $\eta, \eta' \subset \Sigma$, so sei

$$\begin{aligned} \eta \wedge \eta' \; := \; \big\{(x,u) \in \Sigma \; : \; & u \in [u_1, u_2] \text{ mit } u_1, u_2 \in S^{n-1},\ u_1 \neq -u_2, \\ & (x, u_1) \in \eta,\ (x, u_2) \in \eta' \big\}, \end{aligned}$$

wobei hier und im folgenden $[u_1, u_2]$ die abgeschlossene sphärische Strecke ist, die die Vektoren $u_1, u_2 \in S^{n-1}$, $u_1 \neq -u_2$, verbindet. Für Teilmengen $\eta, \eta' \subset \Sigma \cup (\mathbb{R}^n \times \{o\})$ setzen wir

$$\eta \sqcap \eta' := \big((\eta \cap \Sigma) \wedge (\eta' \cap \Sigma)\big) \cup \big\{(x,u) \in \eta : (x,o) \in \eta'\big\} \cup \big\{(x,u) \in \eta' : (x,o) \in \eta\big\}.$$

Für $\eta \subset \Sigma$ und $E \in \mathcal{E}^n_q$, $q \in \{0, \dots, n\}$, setzen wir schließlich

$$\begin{aligned} \eta \wedge E \; := \; \big\{(x,u) \in \Sigma \; : \; & u \in [u_1, u_2] \text{ mit } u_1, u_2 \in S^{n-1},\ u_1 \neq -u_2, \\ & (x, u_1) \in \eta,\ x \in E,\ u_2 \in E^\perp \big\}, \end{aligned}$$

wobei $E^\perp \in \mathcal{L}^n_{n-q}$ der lineare Unterraum ist, der orthogonal ist zu E.

Wir formulieren nun unsere Ergebnisse. Die in den Integranden stehenden Stützmaße setzen wir als vollständig voraus. Für $\eta \subset \Sigma$ und $g \in G_n$ hatten wir schon früher $g\eta := \{(gx, \vartheta u) \in \Sigma : (x,u) \in \eta\}$ gesetzt, wobei $g = \tau \circ \vartheta$ die Zerlegung von g in eine Translation τ und eine Drehung $\vartheta \in SO_n$ ist. Die Konstanten α_{njk} hatten wir auf S. 104 definiert.

Satz 8.3.4. *Sei (K, K') ein zulässiges Paar konvexer Körper. Dann gilt für $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\, K)$, $\eta' \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\, K')$*

$$\int_{G_n} \Theta_j(K \cap gK', \eta \wedge g\eta')\, d\mu(g) = \sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha_{njk} \Theta_k(K, \eta) \Theta_{n+j-k}(K', \eta')$$

für $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Fassen wir die Stützmaße $\Theta_j(K, \cdot)$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$, als Maße auf $\Sigma \cup (\mathbb{R}^n \times \{o\})$ auf und setzen wir noch $\Theta_n(K, \eta) := \lambda(K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : (x,o) \in \eta\})$ für $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma \cup (\mathbb{R}^n \times \{o\}))$, so gilt die folgende Aussage.

Satz 8.3.5. *Es sei (K, K') ein zulässiges Paar konvexer Körper. Ist $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\, K \cup (K \times \{o\}))$ und $\eta' \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\, K' \cup (K' \times \{o\}))$, so gilt*

$$\int_{G_n} \Theta_j(K \cap gK', \eta \sqcap g\eta')\, d\mu(g) = \sum_{k=j}^{n} \alpha_{njk} \Theta_k(K, \eta) \Theta_{n+j-k}(K', \eta')$$

für $j \in \{0, \dots, n\}$.

Die folgende Version der Crofton-Formel können wir ohne Einschränkung an den beteiligten konvexen Körper beweisen.

Satz 8.3.6. *Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $q \in \{1, \dots, n-1\}$. Ist $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$, so gilt*

$$\int_{\mathcal{E}_q^n} \Theta_j(K \cap E, \eta \wedge E)\, d\mu_q(E) = \alpha_{njq} \Theta_{n+j-q}(K, \eta)$$

für alle $j \in \{0, \dots, q-1\}$.

Bemerkung 1: Aus Satz 8.3.6 ergibt sich eine neue geometrische Interpretation der Stützmaße Θ_j (eine analoge Interpretation war bisher nur für die Krümmungsmaße Φ_j bekannt): Für $j \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt

$$\Theta_j(K, \eta) = \frac{1}{\alpha_{n0j}} \int_{\mathcal{E}_{n-j}^n} \Theta_0(K \cap E, \eta \wedge E)\, d\mu_{n-j}(E)\,,$$

und das im Integrand auftretende Maß hat eine einfache anschauliche Interpretation. Es gilt nämlich

$$\Theta_0(K, \eta) = \frac{1}{n\kappa_n}\, \mathcal{H}^{n-1}(\{u \in S^{n-1} :\ \text{ex. } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } (x, u) \in \eta \cap \mathrm{Nor}\ K\})$$

für alle $K \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, vgl. Schneider [36], S. 120, Gleichung (4.5); hierbei ist $\mathcal{H}^{n-1}$ das $(n-1)$-dimensionale Hausdorff-Maß. Insbesondere erhalten dadurch die aus der Theorie der gemischten Volumina bekannten Oberflächenmaße, die durch $\Psi_j(K, \omega) := \Theta_j(K, \mathbb{R}^n \times \omega)$, $\omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$, definiert werden können, eine neue integralgeometrische Interpretation.

Bemerkung 2: Mit Hilfe von Überlegungen, die in den Beweisen der Sätze 8.3.2 und 8.3.3 verwendet werden, kann man zeigen, daß Paare (K, K') konvexer Körper zulässig sind, wenn $\dim K' \leq 2$ ist. Durch Anwenden von Satz 8.3.6 für die Fälle $q = 2$ und $j \in \{0, 1\}$ und von Satz 8.3.4 ist es dann möglich, die Gleichung

$$\int_{G_n} \Theta_{n-2}(K \cap gK', \eta \wedge g\eta')\, d\mu(g) = \alpha_{n(n-2)(n-1)} \Theta_{n-1}(K, \eta) \Theta_{n-1}(K', \eta')$$

für beliebige $K, K' \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$, $\eta' \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K')$ zu zeigen. Da das Resultat doch noch recht speziell und der Beweis etwas länger ist, wollen wir davon absehen, diesen hier wiederzugeben.

Bemerkung 3: Im Hinblick auf die kinematischen Schnittformeln für Stützmaße bieten sich in natürlicher Weise zwei Fragen an: Zum einen, gibt es eine abstrakte Version etwa von Satz 8.3.4, d.h. können die Stützmaße Θ_j im Integranden ersetzt werden durch Elemente aus einer Menge von Funktionalen, die den von $\{\Theta_0, \dots, \Theta_{n-1}\}$ aufgespannten Vektorraum als echte Teilmenge enthält? Wie im Falle der sphärischen Hauptformel (vgl. Abschnitt 6.1) ist es uns nicht gelungen, die bei einer Verallgemeinerung in diese Richtung auftretenden Schwierigkeiten zu überwinden. Zum zweiten stellt sich die Frage, ob es auch translative Schnittformeln für Stützmaße konvexer Körper gibt, etwa analog zu den Ergebnissen von Schneider & Weil für den Fall von Krümmungsmaßen (s. etwa [42], Sätze 3.1.1 und 3.1.3). Es ist möglich, eine Version anzugeben für den Fall, daß die beiden Körper Polytope sind. Im Zusammenhang mit den sich dann stellenden Approximationsproblemen erscheint die Frage interessant, ob die translative Version von Vermutung 8.3.1 richtig ist, d.h. ob die Gleichung $\operatorname{lin} N(K, x) \cap \operatorname{lin} N(K' + t, x) = \{o\}$ für alle $x \in K \cap (K' + t)$ für λ-fast alle $t \in \mathbb{R}^n$ bei beliebigen $K, K' \in \mathcal{K}$ besteht.

Bemerkung 4: Es gibt auch eine gemeinsame Verallgemeinerung der Sätze 8.3.4 und 8.3.6 in Form einer kinematischen Hauptformel für Stützmaße von Zylindern, analog zu der entsprechenden Version für Krümmungsmaße (s. dazu etwa [42], Satz 4.3.2). Die Gültigkeit dieser Verallgemeinerung unterliegt den entsprechenden Einschränkungen wie in Satz 8.3.4: Wir können auch diese Formel nur für „zulässige" Paare (K, Z) zeigen, wobei K ein konvexer Körper und Z ein Zylinder, d.h. eine Menge der Form $M + L$ mit $L \in \mathcal{L}_q^n$, $q \in \{0, \dots, n-1\}$, und $M \in \mathcal{K}$ mit $M \subset L^\perp$ ist. Wir sehen hier davon ab, auf dieses Resultat näher einzugehen, da im Beweis keine Methoden Anwendung finden, die über die für die Sätze 8.3.4 und 8.3.6 verwendeten hinausgehen.

Es gibt auch Versionen der Sätze 8.3.4 – 8.3.6 für die Mengen des Konvexrings. Wir müssen zunächst die Menge Nor K aller Stützelemente auch für Elemente K des Konvexrings $\mathcal{R}$ erklären. Wir gehen dazu wie im sphärischen Fall vor. Ist $K \in \mathcal{R}$, so sei $I(K)$ die Menge aller Folgen $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ mit $K = \cup_{i=1}^\infty K_i$ und $K_i = \emptyset$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Bezeichnet weiter $S(\mathbb{N})$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von $\mathbb{N}$, so setzen wir

$$\operatorname{Nor} K := \bigcap_{(K_i) \in I(K)} \bigcup_{v \in S(\mathbb{N})} \operatorname{Nor} \Big(\bigcap_{i \in v} K_i \Big).$$

Solange Vermutung 8.3.1 noch unbewiesen ist, können wir unsere Versionen der kinematischen Hauptformel für Mengen des Konvexrings nur eingeschränkt zeigen. Sind $K, K' \in \mathcal{R}$, so soll das Paar (K, K') *zulässig* genannt werden, wenn es Darstellungen $K = K_1 \cup \dots \cup K_m$, $K' = K'_1 \cup \dots \cup K'_{m'}$ mit $K_1, \dots, K_m, K'_1, \dots, K'_{m'} \in \mathcal{K}$ gibt derart, daß für alle $v \in S(m)$ und alle $v' \in S(m')$ das Paar $(K_v, K'_{v'})$ konvexer Körper zulässig ist. Nun können wir die folgenden Resultate formulieren.

Satz 8.3.7. *Die Sätze* 8.3.4 *und* 8.3.5 *gelten auch für zulässige Paare* (K, K') *von Elementen des Konvexrings* $\mathcal{R}$.

Satz 8.3.8. *Die Aussage von Satz* 8.3.6 *gilt auch für Mengen* $K \in \mathcal{R}$.

Abschließend möchten wir noch eine Vermutung formulieren, die in gewisser Weise dual ist zu Vermutung 8.3.1. Aufgrund der Bemerkung im Anschluß an Hilfssatz 6.2.1 halten wir auch diese zweite Vermutung für überaus plausibel.

Vermutung 8.3.9. *Sind* K *und* K' *konvexe Körper, so gilt für* μ*-fast alle* $g \in G_n$ *das Folgende: Ist* H *eine Hyperebene derart, daß einer der durch* H *begrenzten abgeschlossenen Halbräume die Körper* K *und* gK' *enthält, und sind die Mengen* $A \subset H \cap K$ *und* $B \subset H \cap gK'$ *affin unabhängig, so ist auch* $A \cup B$ *affin unabhängig.*

Ist speziell K' eine einpunktige Menge, so besagt die Aussage von Vermutung 8.3.9, daß für λ^n-fast alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ jede Gerade durch x, die K berührt, nur einen Punkt mit K gemeinsam hat. Diese Aussage ist als ein Resultat von Ivanov [16] bekannt. Vermutung 8.3.9 wäre also eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von Ivanov.

8.4 Beweise zu Aussagen aus Abschnitt 8.3

Beweis von Satz 8.3.2*:* Wir zeigen für beliebiges $n \geq 2$ gewisse Teilaussagen von Vermutung 8.3.1; in den Fällen $n = 2, 3$ decken diese Teilaussagen schon die gesamte Behauptung ab. (Für $n = 2$ ist aber auch ein einfacherer Beweis möglich.)

Es seien $K, K' \in \mathcal{K}$. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir

$$\begin{aligned} A_{ij} := \big\{ g \in G_n \quad : \quad & \text{es gibt ein } x \in K \cap gK' \text{ mit } \dim N(K,x) \geq i, \\ & \dim N(gK', x) \geq j, \operatorname{lin} N(K,x) \cap \operatorname{lin} N(gK',x) \neq \{o\} \big\}. \end{aligned}$$

Die Mengen A_{ij} sind stets F_σ-Mengen: Setzen wir für $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_{ij}^m := \big\{ g \in G_n \quad : \quad & \text{es existieren } x \in K \cap gK', u_1, \ldots, u_i \in N(K,x) \cap S^{n-1}, \\ & v_1, \ldots, v_j \in N(gK', x) \cap S^{n-1} \text{ und } \lambda_1, \ldots, \lambda_i, \mu_1, \ldots, \mu_j \in \mathbb{R} \\ & \text{mit } |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_i|, |\mu_1|, \ldots, |\mu_j| \leq m, [u_1, \ldots, u_i] \geq 1/m, \\ & [v_1, \ldots, v_j] \geq 1/m \text{ und } \textstyle\sum_{k=1}^i \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^j \mu_k v_k \in S^{n-1} \big\} \end{aligned}$$

(hierbei ist $[u_1, \ldots, u_i]$ das i-dimensionale Volumen des von $u_1, \ldots, u_i$ aufgespannten Parallelepipeds), so ist leicht zu sehen, daß A_{ij}^m abgeschlossen ist für alle $m \in \mathbb{N}$, und es gilt $A_{ij} = \cup_{m=1}^\infty A_{ij}^m$. Die Mengen

$$B_{ij} := A_{ij} \setminus (A_{(i+1)j} \cup A_{i(j+1)})$$

(mit $A_{k(n+1)} := A_{(n+1)k} := \emptyset$ für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$) sind daher Borel-Mengen. Es gilt

$$B_{ij} \subset \big\{ g \in G_n \ : \ \text{es gibt ein } x \in K \cap gK' \text{ mit } \dim N(K,x) = i, \\ \dim N(gK',x) = j \text{ und lin } N(K,x) \cap \text{lin } N(gK',x) \neq \{o\} \big\}\,.$$

Wegen

$$\bigcup_{i,j=1}^{n} B_{ij} = \big\{ g \in G_n : \text{ es gibt ein } x \in K \cap gK' \text{ mit lin } N(K,x) \cap \text{lin } N(gK',x) \neq \{o\} \big\}$$

ist es unser Ziel, $\mu(B_{ij}) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ nachzuweisen. In den Fällen $i = j = 1$, $i + j > n$ und $i + j = n$ werden wir dies im folgenden zeigen können.

Wir setzen noch

$$C_{ij} := \big\{ t \in \mathbb{R}^n \ : \ \text{es gibt ein } x \in K \cap (K'+t) \text{ mit } \dim N(K,x) = i, \\ \dim N(K'+t,x) = j, \text{lin } N(K,x) \cap \text{lin } N(K'+t,x) \neq \{o\} \big\}$$

für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Ist es möglich, für beliebige $K, K' \in \mathcal{K}$ zu zeigen, daß das n-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^n$ der Menge C_{ij} verschwindet, so folgt auch $\mu(B_{ij}) = 0$ für beliebige $K, K' \in \mathcal{K}$.

1. Fall: $i = j = 1$. (Die Untersuchung dieses Falls wäre für den Zweck des Beweises der Sätze 8.3.4 und 8.3.5 entbehrlich.)

Es gilt $C_{11} = C^+ \cup C^-$ mit

$$C^{\pm} := \big\{ t \in \mathbb{R}^n \ : \ \text{es gibt ein } x \in K \cap (K'+t) \text{ mit } \dim N(K,x) = 1, \\ \dim N(K'+t,x) = 1, N(K,x) = \pm N(K'+t,x) \big\}\,.$$

Es gilt $C^- \subset \{t \in \mathbb{R}^n : K \text{ und } K'+t \text{ berühren sich}\} = \text{bd}\,(K - K')$ und daher $\mathcal{H}^n(C^-) = 0$. (Hier und im folgenden ist $K + K'$ für $K, K' \in \mathcal{K}$ die Minkowski-Summe, und es ist $K - K' := K + (-K')$.) Ist $\dim(K+K') < n$, so gilt $\mathcal{H}^n(C^+) = 0$. Wir können daher $\dim(K + K') = n$ annehmen. Nach Theorem 2.3.2 in [39] gibt es zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ Kappen $K_1, \ldots, K_m$ des Körpers $K + K'$ (die K_k sind also Schnitte von $K + K'$ mit abgeschlossenen Halbräumen) mit den Eigenschaften $\text{bd}\,(K+K') \subset \cup_{k=1}^m K_k$ und $\sum_{k=1}^m \lambda(K_k) < \epsilon$. Nach dem Beweis von Lemma 2.3.9 in [39] gilt für gewisse Translationsvektoren $a_k \in \mathbb{R}^n$

$$C^+ \subset \bigcup_{k=1}^{m} ((K_k - K_k) + a_k)\,.$$

Aufgrund von Lemma 2.3.3 in [39] ist $K_k - K_k$ in einem Translat von $K_k + nK_k$ enthalten, daher gilt

$$\lambda(K_k - K_k) \leq (n+1)^n \lambda(K_k)$$

für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$. Damit ist

$$\mathcal{H}^n(C^+) \leq (n+1)^n \sum_{k=1}^{m} \mathcal{H}^n(K_k) = (n+1)^n \sum_{k=1}^{m} \lambda(K_k) < (n+1)^n \epsilon$$

und damit $\mathcal{H}^n(C^+) = 0$ wegen der Beliebigkeit von ϵ. Es gilt damit $\mathcal{H}^n(C_{11}) = 0$. Wie oben bemerkt, folgt daraus $\mu(B_{11}) = 0$.

Zur Behandlung der beiden weiteren Fälle betrachten wir die Menge aller affinen $(n-i)$-Ebenen in $\mathbb{R}^n$, die durch Punkte mit rationalen Koordinaten aufgespannt werden, und ordnen diese Menge auf irgendeine Weise zu einer Folge $(E_r^{n-i})_{r \in \mathbb{N}}$. Es sei B eine Kugel, die K und K' in ihrem Inneren enthält. Wir setzen

$$K_r^i := p(K, E_r^{n-i} \cap B)\,,$$

wobei $p(K, \cdot)$ die in Abschnitt 8.1 definierte metrische Projektionsabbildung ist, und erklären in analoger Weise K'^j_s. Ist $x \in \operatorname{bd} K$ ein Punkt mit $\dim N(K,x) = i$, so gilt $N(K,x) \cap E_r^{n-i} \cap B \neq \emptyset$ und damit $x \in K_r^i$ für ein $r \in \mathbb{N}$, vgl. den Beweis von Theorem 2.2.4 in [39].

2. Fall: $i + j > n$.

Ist $t \in C_{ij}$, so existiert ein Punkt $x \in K \cap (K' + t)$ mit $\dim N(K,x) = i$ und $\dim N(K' + t, x) = j$, daher gilt $x \in K_r^i$ und $x - t \in K'^j_s$ für gewisse $r, s \in \mathbb{N}$. Es besteht also die Inklusion

$$C_{ij} \subset \bigcup_{r,s \in \mathbb{N}} (K_r^i - K'^j_s)\,.$$

Nach Definition ist die Menge $K_r^i - K'^j_s$ gleich dem Bild von

$$(E_r^{n-i} \cap B) \times (E_s^{n-j} \cap B) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

unter der Abbildung $(a,b) \mapsto p(K,a) - p(K',b)$. Da dies eine Lipschitz-Abbildung ist (dies folgt sofort aus Theorem 1.2.2 in [39]), hat $K_r^i - K'^j_s$ endliches Hausdorff-Maß der Dimension $n + i + n - j < n$. Daher gilt $\mathcal{H}^n(K_r^i - K'^j_s) = 0$ für alle $r, s \in \mathbb{N}$ und daher $\mathcal{H}^n(C_{ij}) = 0$. Es folgt $\mu(B_{ij}) = 0$.

3. Fall: $i + j = n$.

Für $r, s \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\begin{aligned} D_{rs}^{ij} := \big\{ g \in B_{ij} \quad : \quad & \text{es gibt ein } x \in K_r^i \cap gK'^j_s \text{ mit } \dim N(K,x) = i, \\ & \dim N(gK', x) = j, \operatorname{lin} N(K,x) \cap \operatorname{lin} N(gK', x) \neq \{o\} \big\}\,. \end{aligned}$$

Da die Mengen K_r^i, K'^j_s kompakt und damit abgeschlossen sind, kann man wie oben zeigen, daß $D_{rs}^{ij} \in \mathcal{B}(G_n)$ ist. Es gilt

$$B_{ij} = \bigcup_{r,s \in \mathbb{N}} D_{rs}^{ij}\,,$$

es genügt also, $\mu(D_{rs}^{ij}) = 0$ zu zeigen. Wir definieren eine meßbare Funktion $f_{rs} : \mathbb{R}^n \times SO_n \to \{0,1\}$ durch

$$f_{rs}(t,\rho) := \mathbf{1}_{D_{rs}^{ij}}(\tau(t) \circ \rho)\,,$$

wobei $\tau(t)$ die Translation mit dem Vektor $t \in \mathbb{R}^n$ ist. Es gilt

$$\mu(C_{rs}^{ij}) = \int\limits_{SO_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{rs}(t,\rho)\, d\lambda(t) d\nu(\rho)\,.$$

Wir setzen zur Abkürzung $E_r := E_r^{n-i} \cap B$, $F_s := E_s^{n-j} \cap B$ und definieren die Funktion $g_{rs} : E_r \times F_s \times SO_n \to \{0,1\}$ als Indikatorfunktion der Menge

$$\begin{aligned}\big\{(x,y,\rho) \in E_r \times F_s \times SO_n \quad : \quad & \dim N(K,p(K,x)) = i, \dim N(K',p(K',y)) = j,\\ & \mathrm{lin}\; N(K,p(K,x)) \cap \mathrm{lin}\; \rho N(K',p(K',y)) \neq \{o\}\big\}\,.\end{aligned}$$

Diese Menge ist der Schnitt der drei Mengen

$$\begin{aligned}\big\{(x,y,\rho \in E_r \times F_s \times SO_n \quad : \quad & \dim N(K,p(K,x)) \geq i, \dim N(K',p(K',y)) \geq j,\\ & \mathrm{lin}\; N(K,p(K,x)) \cap \mathrm{lin}\; \rho N(K',p(K',y)) \neq \{o\}\big\}\,,\\ \big\{(x,y,\rho \in E_r \times F_s \times SO_n \quad : \quad & \dim N(K,p(K,x)) \leq i\big\}\,,\\ \big\{(x,y,\rho \in E_r \times F_s \times SO_n \quad : \quad & \dim N(K',p(K',y)) \leq j\big\}\,.\end{aligned}$$

Die erste Menge ist eine F_σ-Menge, und die beiden anderen sind G_δ-Mengen, wie man ähnlich wie oben einsieht. Die Funktion g_{rs} ist daher meßbar. Legt man auf $E_r \times F_s$ die durch $d((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})) := \|x-\tilde{x}\| + \|y-\tilde{y}\|$ definierte Metrik zugrunde, so ist die Abbildung $\varphi : E_r \times F_s \to \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto p(K,x) - \rho p(K',y)$, für alle $\rho \in SO_n$ eine Lipschitz-Abbildung mit Lipschitz-Konstante ≤ 1. Für die Mengen

$$U := \{t \in \mathbb{R}^n : f_{rs}(t,\rho) = 1\}$$

und

$$V := \{(x,y) \in E_r \times F_s : g_{rs}(x,y,\rho) = 1\}$$

zeigt man leicht

$$U \subset \varphi(V)\,.$$

Daher gilt

$$\lambda(U) = \mathcal{H}^n(U) \leq \mathcal{H}^n(\varphi(V)) \leq \mathcal{H}^n(V) = \lambda^E \otimes \lambda^F(V)\,,$$

also

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{rs}(t,\rho)\, d\lambda(t) \leq \int\limits_{F_s} \int\limits_{E_r} g_{rs}(x,y,\rho)\, d\lambda^E(x) d\lambda^F(y)$$

für alle $\rho \in SO_n$, wobei wir abkürzend $E := E_r^{n-i}$, $F := F_s^{n-j}$ gesetzt haben. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mu(C_{rs}^{ij}) &= \int\limits_{SO_n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{rs}(t,\rho)\,d\lambda(t)d\nu(\rho) \\
&\leq \int\limits_{SO_n}\int\limits_{F_s}\int\limits_{E_r} g_{rs}(x,y,\rho)\,d\lambda^E(x)d\lambda^F(y)d\nu(\rho) \\
&= \int\limits_{F_s}\int\limits_{E_r}\int\limits_{SO_n} g_{rs}(x,y,\rho)\,d\nu(\rho)d\lambda^E(x)d\lambda^F(y) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

denn das innere Integral verschwindet aufgrund von Lemma 4.5.1 in [39]. ■

Wir kommen zum Beweis von Satz 8.3.3. Es wird der folgende Hilfssatz verwendet, der vielleicht auch für sich interessant ist. Im Beweis dieses Hilfssatzes geht wesentlich ein Resultat von Zalgaller [52] ein. Es sei daran erinnert, daß wir für $E \in \mathcal{E}_q^n$ mit $E^\perp$ den linearen Unterraum orthogonal zu E bezeichnet hatten.

Hilfssatz 8.4.1. *Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $q \in \{0,\ldots,n-1\}$. Dann gilt für μ_q-fast alle $E \in \mathcal{E}_q^n$*

$$E^\perp \cap \operatorname{lin} N(K,x) = \{o\}$$

für alle $x \in K \cap E$.

Beweis: Der Fall $q = 0$ ist wegen $\lambda^n(\operatorname{bd} K) = 0$ klar. Sei also $q \geq 1$. Wir sagen, eine Ebene $E \in \mathcal{E}_q^n$ sei in K-allgemeiner Lage, wenn $E^\perp \cap \operatorname{lin} N(K,x) = \{o\}$ ist für alle $x \in K \cap E$, und wir definieren A als die Menge aller $E \in \mathcal{E}_q^n$, die nicht in K-allgemeiner Lage sind. Ähnlich wie im Beweis von Satz 8.3.2 kann man zeigen, daß A eine Borel-Menge ist: Es gilt $A = \cup_{m=1}^\infty A_m$ mit

$$\begin{aligned}
A_m := \{E \in \mathcal{E}_q^n \ &: \ \text{es existieren } x \in K \cap E, u_1, u_2 \in N(K,x) \cap S^{n-1} \text{ und } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\
&\quad \text{mit } |\lambda_1|, |\lambda_2| \leq m \text{ und } \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in E^\perp \cap S^{n-1}\}\,.
\end{aligned}$$

Mittels einfacher Kompaktheitsschlüsse bestätigt man, daß A_m abgeschlossen ist für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit ist A also sogar eine F_σ-Menge.

Wir nehmen zunächst $o \in \operatorname{int} K$ an und zeigen, daß $\nu_q(A \cap \mathcal{L}_q^n) = 0$ gilt. Ist $L \in \mathcal{L}_q^n$ ein linearer Unterraum mit $L \in A$, so existiert ein $x \in L \cap \operatorname{bd} K$ und ein linearer Unterraum $M \subset L^\perp$ mit $\dim(M \cap \operatorname{lin} N(K,x)) = 1$. Wegen $o \in \operatorname{int} K$ gilt $\dim N(K,x) \geq 2$. Es seien $u, v \in N(K,x)$ linear unabhängige Vektoren mit $\dim(M \cap \operatorname{lin}\{u,v\}) = 1$. Für $M' := \operatorname{lin}(M \cup \{u,v\})$ gilt dann $\dim(N(K,x) \cap M') = 2$. Es sei H die Stützebene an den Polarkörper

$$K^* := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,y \rangle \leq 1 \text{ für alle } y \in K\}$$

von K zum äußeren Normalenvektor x, und es sei $F := H \cap K^*$ die zugehörige Stützmenge. Es gilt $y \in F$ genau dann, wenn $\langle x, y\rangle = \max\{\langle y, z\rangle : z \in K\} = 1$ ist. Daher gilt $F = H \cap N(K, x)$, und $M' \cap F$ ist eine Strecke in bd K^*, die parallel ist zu $L^\perp$. Nach einem Ergebnis von Zalgaller [52] (vgl. auch die Formulierung in [39], S. 93 f.) ist die Menge aller $L \in \mathcal{L}_q^n$ mit der Eigenschaft, daß es eine Strecke in bd K^* gibt, die parallel ist zu $L^\perp$, eine ν_q-Nullmenge. Damit ist also in der Tat L in K-allgemeiner Lage für ν_q-fast alle $L \in \mathcal{L}_q^n$.

Nun sei K ein beliebiger konvexer Körper mit inneren Punkten. Wir setzen $B_0 := \{E \in \mathcal{E}_q^n : E \text{ berührt } K\}$ und $B_m := \{E \in \mathcal{E}_q^n : E \in A\backslash B_0,\ V_q(K \cap E) \geq 1/m\}$ für $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A = \cup_{m=0}^\infty B_m$. Die Menge B_0 ist abgeschlossen. Es gilt $\mu_q(B_0) = 0$, und die Abbildung $\mathcal{E}_q^n\backslash B_0 \to \mathbb{R}$, $E \mapsto V_q(K \cap E)$, ist stetig (vgl. Lemma 1 in [40]). Daher gilt $B_m \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_q^n)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Fubini ist für $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mu_q(B_m) &= \int\limits_{\mathcal{L}_q^n}\int\limits_{L^\perp} \mathbf{1}_{B_m}(L+y)\, d\lambda^{L^\perp}(y) d\nu_q(L) \\
&= \int\limits_{\mathcal{L}_q^n}\int\limits_{\{y\in L^\perp : L+y\in B_m\}} V_q(K\cap(L+y))^{-1}\int\limits_L \mathbf{1}_K(y+z)\, d\lambda^L(z) d\lambda^{L^\perp}(y) d\nu_q(L) \\
&\leq m\int\limits_{\mathcal{L}_q^n}\int\limits_{L^\perp}\int\limits_L \mathbf{1}_{B_m}(L+y+z)\mathbf{1}_K(y+z)\, d\lambda^L(z) d\lambda^{L^\perp} d\nu_q(L) \\
&= m\int\limits_K\int\limits_{\mathcal{L}_q^n} \mathbf{1}_{B_m}(L+x)\, d\nu_q(L) d\lambda^n(x)\,.
\end{aligned}$$

Da nach dem oben Gezeigten

$$\int\limits_{\mathcal{L}_q^n} \mathbf{1}_{B_m}(L+x)\, d\nu_q(L) = 0$$

gilt für alle $x \in \operatorname{int} K$, erhalten wir $\mu_q(B_m) = 0$ und damit wie behauptet $\mu_q(A) = 0$.

Nun sei $r := \dim K < n$. Ist $r + q \leq n-1$, so gilt $K \cap E = \emptyset$ für μ_q-fast alle $E \in \mathcal{E}_q^n$ und die Behauptung gilt trivialerweise. Sei nun $r + q \geq n$. Ist $F := \operatorname{aff} K \in \mathcal{E}_r^n$, so gilt $E^\perp \cap F^\perp = \{o\}$ für μ_q-fast alle $E \in \mathcal{E}_q^n$. Für $E \in \mathcal{E}_q^n$ mit $E^\perp \cap F^\perp = \{o\}$ ist E genau dann in K-allgemeiner Lage, wenn die $(r+q-n)$-dimensionale Ebene $E \cap F$ im Raum F in K-allgemeiner Lage ist (dies folgt aus der leicht zu bestätigenden Äquivalenz

$$(E \cap F)^\perp \cap L = \{o\} \iff E^\perp \cap \operatorname{lin}(F^\perp \cup L) = \{o\}$$

für lineare Unterräume L mit $L + x \subset F$ für $x \in F$). Die Abbildung $f : \{E \in \mathcal{E}_q^n : E^\perp \cap F^\perp = \{o\}\} \to \mathcal{E}_{r+q-n}^n$, $E \mapsto E \cap F$, ist stetig. Das Bildmaß der Einschränkung von μ_q unter f ist invariant unter Bewegungen, die F in sich überführen, es ist endlich auf kompakten Mengen, und es verschwindet nicht identisch. Das Bild von f kann mit $\mathcal{E}^r_{q+r-n}$ identifiziert werden. Nach einem elementaren Eindeutigkeitssatz (s. etwa Schneider & Weil [42], Satz 1.3.4) muß das genannte Bildmaß bis auf einen positiven Faktor mit dem Maß μ_{q+r-n} auf $\mathcal{E}^r_{q+r-n}$ übereinstimmen. Aus der Behandlung des Falles volldimensionaler konvexer Körper folgt nun wiederum $\mu_q(A) = 0$. ■

Beweis von Satz 8.3.3*:* Es sei $K \in \mathcal{K}$, $P \in \mathcal{P}$ und $q \in \{0, \dots, n-1\}$. Die Menge aller Ebenen $E \in \mathcal{E}^n_q$ mit $E^\perp \cap \operatorname{lin} N(K, x) \neq \{o\}$ für ein $x \in K \cap E$ bezeichnen wir mit A. Nach Hilfssatz 8.4.1 gilt $\mu_q(A) = 0$. Für beliebiges $E \in \mathcal{E}^n_q$ gilt daher

$$\begin{aligned}
&\mu(\{g \in G_n : gE \in A\}) \\
&\quad = \int_{SO_n} \int_E \int_{E^\perp} \mathbf{1}_A(\rho(E + x + y))\, d\lambda^{E^\perp}(x) d\lambda^E(y) d\nu(\rho) \\
&\quad = \int_E \int_{SO_n} \int_{E^\perp} \mathbf{1}_A(\rho(E + x))\, d\lambda^{E^\perp}(x) d\nu(\rho) d\lambda^E(y) \\
&\quad = \int_E \mu_q(A)\, d\lambda^E(y) \\
&\quad = 0\,.
\end{aligned}$$

Für jedes $E \in \mathcal{E}^n_q$ gilt also

$$(gE)^\perp \cap \operatorname{lin} N(K, x) = \{o\} \qquad \text{für alle } x \in K \cap gE$$

für μ-fast alle $g \in G_n$. Ist $g \in G_n$ eine Bewegung mit

$$\operatorname{lin} N(K, x) \cap \operatorname{lin} N(gP, x) \neq \{o\} \qquad \text{für ein } x \in K \cap gP,$$

so sei E die affine Hülle derjenigen Seite von P, die x als relativ inneren Punkt enthält. Es gilt dann $(gE)^\perp \cap \operatorname{lin} N(K, x) \neq \{o\}$. Da P nur endlich viele Seiten besitzt, ist daher das Paar (K, P) zulässig. Aus der Inversionsinvarianz von μ folgt nun, daß auch das Paar (P, K) zulässig ist. ■

Die Beweise der Sätze 8.3.4 und 8.3.5 verlaufen weitgehend analog zu den Beweisen der jeweiligen sphärischen Gegenstücke (Sätze 6.1.1 und 6.1.3). Wir können uns daher mit einer Beweisskizze begnügen.

Hilfssatz 8.4.2. *Es sei (K, K') ein zulässiges Paar konvexer Körper, weiter seien $\eta, \eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ und $\epsilon > 0$. Dann ist für μ-fast alle $g \in G_n$ die Menge $(\eta \cap \operatorname{Nor} K) \wedge g(\eta' \cap \operatorname{Nor} K')$ meßbar in bezug auf das Maß $\mu_\epsilon(K \cap gK', \cdot)$, und*

$$\mu_\epsilon(K \cap gK', (\eta \cap \operatorname{Nor} K) \wedge g(\eta' \cap \operatorname{Nor} K'))$$

ist bei festem η' in Abhängigkeit von η ein Maß (ebenso bei festem η in Abhängigkeit von η').

Beweisskizze: Es sei $(K, K') \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ ein zulässiges Paar konvexer Körper, weiter seien $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K)$, $\eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K')$ und $\epsilon > 0$. Für $g \in G_n$ definieren wir $\eta \sim g\eta' \subset \eta \wedge g\eta'$ durch

$$\begin{aligned}\eta \sim g\eta' := \big\{(x,u) \in \Sigma \quad : \quad & u \in [u_1, u_2] \backslash \{u_1, u_2\} \text{ mit } u_1, u_2 \in S^{n-1}, \\ & u_1 \neq -u_2, (x, u_1) \in \eta, (x, u_2) \in g\eta'\big\}\,.\end{aligned}$$

Wie im Beweis von Hilfssatz 6.2.2 sieht man $\eta \sim g\eta' \in \mathcal{B}(\Sigma)$ für μ-fast alle $g \in G_n$. Wir setzen

$$B_g := (\text{Nor } K \cup \text{Nor } gK') \cap ((\text{bd } K \cap \text{bd } gK') \times S^{n-1})$$

für alle $g \in G_n$. Dann ist $(\eta \wedge g\eta') \backslash (\eta \sim g\eta') \subset B_g$, und es gilt

$$M_\epsilon(K \cap gK', B_g) = M_\epsilon(K, (\text{bd } K \cap \text{bd } gK') \times S^{n-1}) \cup M_\epsilon(gK', (\text{bd } K \cap \text{bd } gK') \times S^{n-1})$$

für alle $g \in G_n$. Nach der Steiner-Formel gilt daher

$$\mu_\epsilon(K \cap gK', B_g) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon^{n-i} \kappa_{n-i} \big(\Phi_i(K, \text{bd } K \cap \text{bd } gK') + \Phi_i(gK', \text{bd } K \cap \text{bd } gK')\big)\,.$$

Ist $M \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper, der K' in seinem Inneren enthält, mit der Eigenschaft $K \subset gM$ für alle $g \in G_n$ mit $K \cap gK' \neq \emptyset$, so gilt nach Satz 8.1.2

$$\begin{aligned}\int_{G_n} \Phi_i(K, \text{bd } K \cap \text{bd } gK')\, d\mu(g) &= \int_{G_n} \Phi_i(K \cap gM, \text{bd } K \cap \text{bd } gK')\, d\mu(g) \\ &= \sum_{k=i}^{n} \alpha_{nik} \Phi_k(K, \text{bd } K) \Phi_{n+i-k}(M, \text{bd } K') \\ &= \alpha_{nii} V_i(K) \lambda(\text{bd } K') = 0\,,\end{aligned}$$

und analog erhält man

$$\int_{G_n} \Phi_i(gK', \text{bd } K \cap \text{bd } gK')\, d\mu(g) = 0$$

für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Damit ist $\int_{G_n} \mu_\epsilon(K \cap gK', B_g)\, d\mu(g) = 0$, und es folgt

$$\mu_\epsilon(K \cap gK', B_g) = 0 \qquad \text{für } \mu\text{-fast alle } g \in G_n.$$

Die Menge $\eta \wedge g\eta'$ ist damit $\mu_\epsilon(K \cap gK', \cdot)$-meßbar, und es gilt

$$\mu_\epsilon(K \cap gK', \eta \wedge g\eta') = \mu_\epsilon(K \cap gK', \eta \sim g\eta')\,,$$

jeweils für μ-fast alle $g \in G_n$. Der Rest der Behauptung kann wie im Beweis von Hilfssatz 6.2.3 eingesehen werden. ■

Hilfssatz 8.4.3. *Es sei* (K, K') *ein zulässiges Paar konvexer Körper, und es seien* $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K)$, $\eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K')$ *und* $\epsilon > 0$. *Dann stimmt die Abbildung*

$$G_n \to \mathbb{R}, \; g \mapsto \mu_\epsilon(K \cap gK', \eta \wedge g\eta')\,,$$

für μ*-fast alle* $g \in G_n$ *mit einer meßbaren Abbildung überein, und es gilt*

$$\int\limits_{G_n} \mu_\epsilon(K \cap gK', \eta \wedge g\eta')\, d\mu(g) = \sum_{k,l=0}^{n-1} a_{kl} \Theta_k(K, \eta) \Theta_l(K', \eta')$$

mit gewissen nur von ϵ *abhängigen Konstanten* $a_{kl} \in \mathbb{R}$.

Beweisskizze: Unter Verwendung von Hilfssatz 8.4.2 kann der Beweis völlig analog zu den Beweisen der Hilfssätze 6.2.4 bis 6.2.7 geführt werden. Bei dem anzuwendenden Approximationsargument geht wesentlich ein, daß Paare (K, P) und (P, K) für $K \in \mathcal{K}$ und $P \in \mathcal{P}$ nach Satz 8.3.3 stets zulässig sind. ∎

Beweis der Sätze 8.3.4 *und* 8.3.5*:* Sei $(K, K') \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ ein zulässiges Paar konvexer Körper, weiter seien $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K)$, $\eta' \in \mathcal{B}(\text{Nor } K')$ und $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Nach Gleichung (8.1) gilt

$$\Theta_j(K \cap gK', \cdot) = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \mu_k(K \cap gK', \cdot)$$

für alle $g \in G_n$ mit gewissen Konstanten $b_{jk} \in \mathbb{R}$, und mit Hilfssatz 8.4.3 folgt

$$\int\limits_{G_n} \Theta_j(K \cap gK', \eta \wedge g\eta')\, d\mu(g) = \sum_{k,l=0}^{n-1} c_{jkl} \Theta_k(K, \eta) \Theta_l(K', \eta')$$

mit gewissen Konstanten $c_{jkl} \in \mathbb{R}$. Für alle $g \in G_n$ mit der Eigenschaft, daß K und gK' sich nicht berühren (dies trifft auf μ-fast alle $g \in G_n$ zu, vgl. [42], Hilfssatz 2.1.4), gilt

$$\text{Nor } K \wedge \text{Nor } gK' = \text{Nor } (K \cap gK') \cap ((\text{bd } K \cap \text{bd } gK') \times S^{n-1})\,;$$

dies folgt in einfacher Weise aus Theorem 2.2.1 in [39]. Setzt man daher speziell

$\eta = \text{Nor } K$, $\eta' = \text{Nor } K'$, so folgt mit Satz 8.1.2

$$\begin{aligned}
&\int_{G_n} \Theta_j(K \cap gK', \text{Nor } K \wedge \text{Nor } gK')\, d\mu(g) \\
&\qquad = \int_{G_n} \Theta_j(K \cap gK', (\text{bd } K \cap \text{bd } gK') \times S^{n-1})\, d\mu(g) \\
&\qquad = \int_{G_n} \Phi_j(K \cap gK', \text{bd } K \cap \text{bd } gK')\, d\mu(g) \\
&\qquad = \sum_{k=j}^{n} \alpha_{njk} \Phi_k(K, \text{bd } K) \Phi_{n+j-k}(K', \text{bd } K') \\
&\qquad = \sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha_{njk} V_k(K) V_{n+j-k}(K')\,.
\end{aligned}$$

Die Werte der Konstanten c_{jkl} können damit bestimmt werden, und es folgt die Behauptung von Satz 8.3.4.

Den Beweis von Satz 8.3.5 brauchen wir nicht auszuführen, da der Beweis von Satz 6.1.3 fast wörtlich übernommen werden kann. ■

Bemerkung: In entsprechender Weise wie für die kinematische Hauptformel für Stützmaße, d.h. durch Betrachten der lokalen Parallelvolumina, kann man auch einen neuen Beweis der von Schneider bewiesenen Drehsummenformel für Stützmaße (s. etwa [39], Theorem 4.5.9) angeben. Als Beweishilfsmittel wird dabei anstelle von Satz 8.3.3 (bzw. der Aussage von Vermutung 8.3.1, falls diese zutrifft) wesentlich Corollary 2.3.11 in Schneider [39] verwendet.

Beweis von Satz 8.3.6*:* Es ist natürlich möglich, einen Beweis zu geben, der demjenigen von Satz 8.3.4 entspricht. In diesem Fall würde Hilfssatz 8.4.1 im Beweis verwendet werden. Wie im Fall der Crofton-Formel für Krümmungsmaße kann man die gewünschte Aussage aber auch direkt aus der betreffenden Version der kinematischen Hauptformel gewinnen. Diesen Beweis wollen wir im folgenden darstellen.

Es seien $K \in \mathcal{K}$, $\eta \in \mathcal{B}(\text{Nor } K)$, $q \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $j \in \{0, \ldots, q-1\}$. Ist $L \in \mathcal{L}_q^n$ und $P \in \mathcal{P}$ mit $P \subset L$, so gilt

$$\Theta_q(P, P \times (L^\perp \cap S^{n-1})) = \lambda^L(P) \quad \text{und} \quad \Theta_k(P, P \times (L^\perp \cap S^{n-1})) = 0 \text{ für } k \neq q$$

und damit wegen $P \times (L^\perp \cap S^{n-1}) \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ P)$

$$\begin{aligned}\int_{G_n} \Theta_j(K \cap gP, \eta \wedge g(P \times (L^\perp \cap S^{n-1})))\, d\mu(g) \\ &= \sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha_{njk} \Theta_k(K,\eta) \Theta_{n+j-k}(P, P \times (L^\perp \cap S^{n-1})) \\ &= \alpha_{nj(n+j-q)} \Theta_{n+j-q}(K,\eta) \lambda^L(P) \\ &= \alpha_{njq} \Theta_{n+j-q}(K,\eta)\lambda^L(P) \qquad (8.2)\end{aligned}$$

nach den Sätzen 8.3.3 und 8.3.4.

Unser Ziel ist es im folgenden, eine zweite Darstellung für das linksstehende Integral anzugeben. Es sei $B \subset L$ eine beschränkte Borel-Menge, und es sei $P \in \mathcal{P}$ mit $P \subset L$ und $B \subset P$. Da Θ_j lokal erklärt ist, gilt

$$\Theta_j(K \cap gP, \eta \wedge g(B \times (L^\perp \cap S^{n-1}))) = \Theta_j(K \cap gL, \eta \wedge g(B \times (L^\perp \cap S^{n-1})))$$

für μ-fast alle $g \in G_n$, nämlich für alle g, für die die linke Seite wohldefiniert ist (der Beweis von Satz 8.3.4 zeigt, daß dies für alle $g \in G_n \setminus N$ mit einer nicht von B abhängigen μ-Nullmenge N zutrifft). Daher ist die Abbildung

$$B \mapsto \varphi(\vartheta, x_1, x_2, B) := \Theta_j(K \cap \vartheta(L + x_1), \eta \wedge (\vartheta(B + x_1 + x_2) \times (\vartheta L^\perp \cap S^{n-1})))$$

für $(\nu \otimes \lambda^{L^\perp} \otimes \lambda^L)$-fast alle $(\vartheta, x_1, x_2) \in SO_n \times L^\perp \times L$ wohldefiniert und ein Maß auf dem Ring der beschränkten Borel-Mengen in L, und $\varphi(\vartheta, x_1, x_2, B)$ ist in Abhängigkeit von (ϑ, x_1, x_2) meßbar. Nach dem Satz von Fubini ist daher die Abbildung

$$B \mapsto \int_L \varphi(\vartheta, x_1, x_2, B)\, d\lambda^L(x_2)$$

für $(\nu \otimes \lambda^{L^\perp})$-fast alle $(\vartheta, x_1) \in SO_n \times L^\perp$ wohldefiniert und nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ein Maß. Dieses Maß ist endlich auf kompakten Mengen und wegen der Translationsinvarianz von λ^L invariant unter Translationen in L. Es folgt

$$\int_L \varphi(\vartheta, x_1, x_2, B)\, d\lambda^L(x_2) = c\, \lambda^L(B) \qquad (8.3)$$

für alle beschränkten $B \in \mathcal{B}(L)$ für $(\nu \otimes \lambda^{L^\perp})$-fast alle (ϑ, x_1) mit einer Konstanten $c \geq 0$, die zwar von (ϑ, x_1), nicht aber von B abhängt. Ist $K \cap \vartheta(L + x_1) = \emptyset$, so gilt offensichtlich $c = 0$. Nun sei $(\vartheta, x_1) \in SO_n \times L^\perp$ so gewählt, daß $K \cap \vartheta(L + x_1) \neq \emptyset$ gilt und daß Gleichung (8.3) besteht. Zur Bestimmung der Konstante c sei B eine Kugel in L, und es sei $\alpha \geq 1$. Im folgenden bezeichnen c_1, c_2, c_3 gewisse positive Konstanten, die unabhängig sind von α. Aus der Steiner-Formel entnimmt man leicht

$$|\lambda^L(\alpha B) - \lambda^L(\{x_2 \in L : K \cap \vartheta(\alpha B + x_1 + x_2) \neq \emptyset\})| \leq c_1 \alpha^{q-1}$$

und

$$\lambda^L\big(\{x_2 \in L : K \cap \vartheta(\alpha B + x_1 + x_2) \neq \emptyset,\ K \cap \vartheta(L + x_1) \not\subset \vartheta(\alpha B + x_1 + x_2)\}\big) \leq c_2 \alpha^{q-1}.$$

Setzen wir

$$X := \{x_2 \in L : K \cap \vartheta(L + x_1) \subset \vartheta(\alpha B + x_1 + x_2)\}\,,$$

so folgt

$$|\lambda^L(\alpha B) - \lambda^L(X)| \leq (c_1 + c_2)\alpha^{q-1} \tag{8.4}$$

und

$$|\lambda^L(\{x_2 \in L : K \cap \vartheta(\alpha B + x_1 + x_2) \neq \emptyset\}) - \lambda^L(X)| \leq c_2 \alpha^{q-1}\,. \tag{8.5}$$

Für alle $x_2 \in X$ gilt $\eta \wedge (\vartheta(\alpha B + x_1 + x_2) \times (\vartheta L^\perp \cap S^{n-1})) = \eta \wedge \vartheta(L + x_1)$ wegen $\eta \subset \operatorname{Nor} K$ und somit

$$\varphi(\vartheta, x_1, x_2, \alpha B) = \Theta_j(K \cap \vartheta(L + x_1), \eta \wedge \vartheta(L + x_1))\,.$$

Aus (8.4) und (8.5) folgt daher

$$\begin{aligned}
&\left| \int_L \varphi(\vartheta, x_1, x_2, \alpha B)\, d\lambda^L(x_2) - \lambda^L(\alpha B)\Theta_j(K \cap \vartheta(L + x_1), \eta \wedge \vartheta(L + x_1)) \right| \\
&\quad \leq \left| \int_L \varphi(\vartheta, x_1, x_2, \alpha B)\, d\lambda^L(x_2) - \int_X \varphi(\vartheta, x_1, x_2, \alpha B)\, d\lambda^L(x_2) \right| \\
&\qquad + \left| \int_X \varphi(\vartheta, x_1, x_2, \alpha B)\, d\lambda^L(x_2) - \lambda^L(\alpha B)\Theta_j(K \cap \vartheta(L + x_1), \eta \wedge \vartheta(L + x_1)) \right| \\
&\quad \leq c_3 \alpha^{q-1}\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\lambda^L(\alpha B) = \lambda^L(B)\,\alpha^q$ muß daher für die Konstante c in Gleichung (8.3)

$$c = \Theta_j(K \cap \vartheta(L + x_1), \eta \wedge \vartheta(L + x_1))$$

gelten. Insbesondere gilt für alle $P \in \mathcal{P}$ mit $P \subset L$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_n} \Theta_j(K \cap gP, \eta \wedge g(P \times (L^\perp \cap S^{n-1})))\, d\mu(g) \\
&= \int\limits_{G_n} \Theta_j(K \cap gL, \eta \wedge g(P \times (L^\perp \cap S^{n-1})))\, d\mu(g) \\
&= \int\limits_{SO_n} \int\limits_{L^\perp} \int\limits_{L} \Theta_j(K \cap \vartheta(L + x_1), \eta \wedge (\vartheta(P + x_1 + x_2) \times (\vartheta L^\perp \cap S^{n-1}))) \\
&\qquad\qquad d\lambda^L(x_2) d\lambda^{L^\perp}(x_1) d\nu(\vartheta) \\
&= \int\limits_{SO_n} \int\limits_{L^\perp} \lambda^L(P) \Theta_j(K \cap \vartheta(L + x_1), \eta \wedge \vartheta(L + x_1))\, d\lambda^{L^\perp}(x_1) d\nu(\vartheta) \\
&= \lambda^L(P) \int\limits_{\mathcal{E}_q^n} \Theta_j(K \cap E, \eta \wedge E)\, d\mu_q(E)\,,
\end{aligned}$$

und ein Vergleich mit (8.2) ergibt die Behauptung. ■

Auch die Ausdehnung der Gültigkeit der kinematischen Formeln auf die Mengen des Konvexrings kann wie in dem ausführlich behandelten sphärischen Fall geschehen. Es werden die folgenden beiden Hilfssätze verwendet, deren Beweise wir ebenfalls nicht auszuführen brauchen. (Im Beweis von Hilfssatz 8.4.5 wird natürlich wesentlich Hilfssatz 8.4.1 verwendet.)

Hilfssatz 8.4.4. *Es sei (K, K') ein zulässiges Paar von Mengen aus $\mathcal{R}$. Sind $K_1, \dots, K_m$, $K'_1, \dots, K'_{m'} \in \mathcal{K}$ mit $K = K_1 \cup \dots \cup K_m$ und $K' = K'_1 \cup \dots \cup K'_{m'}$ derart, daß die Paare $(K_v, K'_{v'})$ zulässig sind für alle $v \in S(m)$ und alle $v' \in S(m')$, und sind $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$, $\eta' \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K')$, so gilt für μ-fast alle $g \in G_n$*

$$\Theta_j(K_v \cap gK'_{v'}, \eta \wedge g\eta') = \Theta_j(K_v \cap gK'_{v'}, (\eta \cap \mathrm{Nor}\ K_v) \wedge g(\eta' \cap \mathrm{Nor}\ K'_{v'}))$$

für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$ und alle $v \in S(m)$, $v' \in S(m')$.

Hilfssatz 8.4.5. *Es sei $K \in \mathcal{R}$, $K = K_1 \cup \dots \cup K_m$ mit $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\mathrm{Nor}\ K)$. Ist $q \in \{1, \dots, n\}$, so gilt für μ_q-fast alle $E \in \mathcal{E}_q^n$*

$$\Theta_j(K_v \cap E, \eta \wedge E) = \Theta_j(K_v \cap E, (\eta \cap \mathrm{Nor}\ K_v) \wedge E)$$

für alle $j \in \{0, \dots, q-1\}$ und alle $v \in S(m)$.

Literatur

[1] Allendoerfer, C.B., Steiner's formula on a general S^{n+1}. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 128 - 135.

[2] Allendoerfer, C.B., Weil, A., The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. *Trans. Amer. Math. Soc.* **53** (1943), 101 - 129.

[3] Arnold, R., Über die Schwerpunkte stark konvexer Bereiche der Sphäre. *J. Geom.* **42** (1991), 17 - 29.

[4] Bangert, V., Über die Approximation von lokal konvexen Mengen. *Manuscripta math.* **25** (1978), 397 - 420.

[5] Blaschke, W., *Vorlesungen über Integralgeometrie.* 3. Aufl., VEB Deutsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1955.

[6] Ewald, G., Larman, D.G., Rogers, C.A., The directions of the line segments and of the r-dimensional balls on the boundary of a convex body in Euclidean space. *Mathematika* **17** (1970), 1 – 20.

[7] Gänssler, P., Stute, W., *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer, Berlin 1977.

[8] Groemer, H., On the extension of additive functionals on classes of convex sets. *Pacific J. Math.* **75** (1978), 397 - 410.

[9] Gruber, P.M., Schneider, R., Problems in geometric convexity. In: *Contributions to Geometry, Proc. Geometry Symp.*, Siegen 1978 (Hrg. J. Tölke, J.M. Wills), Birkhäuser, Basel 1979, S. 255 - 278.

[10] Hadwiger, H., Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereiche. *Comment. Math. Helvet.* **18** (1945), 59 - 72.

[11] Hadwiger, H., Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. *J. reine angew. Math.* **194** (1955), 101 - 110.

[12] Hadwiger, H., Integralsätze im Konvexring. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **20** (1956), 136 - 154.

[13] Hadwiger, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer, Berlin 1957.

[14] Herglotz, G., Über die Steinersche Formel für Parallelflächen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **15** (1943), 165 - 177.

[15] Ishihara, T., The Euler characteristics and Weyl's curvature invariants of submanifolds in spheres. *J. Math. Soc. Japan* **39** (1987), 247 - 256.

[16] Ivanov, B.A., Über geradlinige Strecken auf dem Rand eines konvexen Körpers (russisch). *Ukrain. geom. Sbornik* **13** (1973), 69 - 71.

[17] Kohlmann, P., Curvature measures and Steiner formulae in space forms. *Geom. Dedicata* **40** (1991), 191 - 211.

[18] Kowalsky, H.-J., *Vektoranalysis* 2. de Gruyter, Berlin 1976.

[19] Lee, S., Kinematic formula and tube formula in space of constant curvature. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **33** (1990), 79 - 88.

[20] McMullen, P., Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **78** (1975), 247 - 261.

[21] McMullen, P., On the axiomatic characterization of spherical volume. Private Mitteilung an R. Schneider, 1981.

[22] McMullen, P., Schneider, R., Valuations on convex bodies. In: *Convexity and Its Applications* (Hrg. P.M. Gruber, J.M. Wills), Birkhäuser, Basel 1983, S. 170 - 247.

[23] Meyer, P., Eine Verallgemeinerung der Steinerschen Formeln. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* **28** (1977), 119 - 123.

[24] Miles, R.E., Random points, sets and tessellations on the surface of a sphere. *Sankhyá*, Ser. A, **33** (1971), 145 - 174.

[25] Santaló, L.A., On parallel hypersurfaces in the elliptic and hyperbolic n-dimensional space. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 325 - 330.

[26] Santaló, L.A., Geometria integral en espacios de curvatura constante. *Publ. Com. Nac. Energia Atomica, Ser. Mat.* **1** (1952), fasc. 1.

[27] Santaló, L.A., *Introduction to Integral Geometry.* Hermann, Paris 1953.

[28] Santaló, L.A., Sobre la formula de Gauss-Bonnet para poliedros en espacios de curvatura constante. *Revista Un. mat. Argentina* **20** (1962), 79 - 91.

[29] Santaló, L.A., Sobre la formula fundamental cinemática de la geometria integral en espacios de curvatura constante. *Math. Notae* **18** (1963), 79 - 94.

[30] Santaló, L.A., *Integral Geometry and Geometric Probability.* Addison-Wesley, Reading 1976.

[31] Santaló, L.A., Cauchy's and Kubota's formula for convex bodies in elliptic n-space. *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino* **38** (1980), 51 - 58.

[32] Schneider, R., Krümmungsschwerpunkte konvexer Körper I. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **37** (1972), 112 - 132.

[33] Schneider, R., Kinematische Berührmaße für konvexe Körper. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **44** (1975), 12 - 23.

[34] Schneider, R., Curvature measures of convex bodies. *Ann. Mat. Pura Appl.* **116** (1978), 101 - 134.

[35] Schneider, R., Kinematic measures for sets of colliding convex bodies. *Mathematica* **25** (1978), 1 - 12.

[36] Schneider, R., Parallelmengen mit Vielfachheit und Steiner-Formeln. *Geom. Dedicata* **9** (1980), 111 - 127.

[37] Schneider, R., Curvature measures and integral geometry of convex bodies. *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino* **38** (1980), 79 - 98.

[38] Schneider, R., A uniqueness theorem for finitely additive invariant measures on a compact homogenous space. *Rend. Circ. Mat. Palermo* II **30** (1981), 341 - 344.

[39] Schneider, R., *Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory.* Cambridge University Press, Cambridge 1993.

[40] Schneider, R., An extension of the principal kinematic formula of integral geometry. *Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo* II **35** (1994), 275 - 290.

[41] Schneider, R., Weil, W., Translative and kinematic integral formulae for curvature measures. *Math. Nachr.* **129** (1986), 67 - 80.

[42] Schneider, R., Weil, W., *Integralgeometrie.* Teubner, Stuttgart 1992.

[43] Schneider, R., Wieacker, J.A., Integral geometry. In: *Handbook of Convex Geometry* (Hrg. P.M. Gruber, J.M. Wills), North-Holland, Amsterdam 1993, S. 1349 - 1390.

[44] Teufel, E., Integral geometry and projection formulas in spaces of constant curvature. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **56** (1986), 221 - 232.

[45] Teufel, E., Kinematische Berührformeln in Räumen konstanter Krümmung I, II. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **58** (1988), 255 - 266, **59** (1989), 107 - 122.

[46] Vidal Abascal, E., A generalization of Steiner's formulae. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 841 - 844.

[47] Wendel, J.G., A problem in geometric probability. *Math. Scand.* **11** (1962), 109 - 111.

[48] Weyl, H., On the volume of tubes. *Amer. J. Math.* **61** (1939), 461 - 472.

[49] Wu, T.J., Integralgeometrie 26. Über die kinematische Hauptformel. *Math. Z.* **43** (1938), 212 - 227.

[50] Wu, T.J., Integralgeometrie 28. Über elliptische Geometrie. *Math. Z.* **43** (1938), 495 - 521.

[51] Zähle, M., Approximation and characterization of generalized Lipschitz-Killing curvatures. *Ann. Global. Anal. Geom.* **8** (1990), 249 - 260.

[52] Zalgaller, V.A., Über k-dimensionale Richtungen, die singulär sind für einen konvexen Körper F im $\mathbb{R}^n$ (russisch). *Zapiski naučn. Sem. Leningrad. Otd. mat. Inst. Steklov* **27** (1972), 67 - 72, engl. Übers.: *J. Soviet Math.* **3** (1975), 437 - 441.

Symbolverzeichnis

Die folgende Liste enthält die verwendeten Symbole in der Reihenfolge ihres ersten Auftretens. Einige der Zeichen haben in Kapitel 8 andere Bedeutungen als im vorangehenden Text.

A. Kapitel 2 bis 7

B. Kapitel 8